MUITAS VOZES, MUITAS MANEIRAS de Aprender Matemática:

Participar numa Educação Intercultural e Inclusiva

Margarida César

Com a colaboração de Ricardo Machado

Editora Poisson

Margarida César

Muitas Vozes, Muitas Maneiras de Aprender Matemática

Participar numa Educação Intercultural e Inclusiva

1ª Edição

Belo Horizonte
Editora Poisson
2026

Editor Chefe: Dr. Darly Fernando Andrade

Conselho Editorial
Dr. Antônio Artur de Souza – Universidade Federal de Minas Gerais
Ms. Davilson Eduardo Andrade
Dra. Elizângela de Jesus Oliveira – Universidade Federal do Amazonas
MSc. Fabiane dos Santos
Dr. José Eduardo Ferreira Lopes – Universidade Federal de Uberlândia
Dr. Otaviano Francisco Neves – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Dr. Luiz Cláudio de Lima – Universidade FUMEC
Dr. Nelson Ferreira Filho – Faculdades Kennedy
Ms. Valdiney Alves de Oliveira – Universidade Federal de Uberlândia

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C337m
Muitas Vozes, Muitas Maneiras de Aprender Matemática: Participar numa Educação Intercultural e Inclusiva / Margarida César – Belo Horizonte MG: Editora Poisson, 2026. 439 p.

Formato: PDF
ISBN: 978-65-5866-667-7
DOI: 10.36229/978-65-5866-667-7
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia

1. Educação 2. Matemática. 1. CÉSAR, Margarida 2. Título

CDD-370

SÔNIA MÁRCIA SOARES DE MOURA – CRB 6/1896

O conteúdo deste livro está licenciado sob a Licença de Atribuição Creative Commons 4.0.
Com ela é permitido compartilhar o livro, devendo ser dado o devido crédito, não podendo ser utilizado para fins comerciais e nem ser alterada.

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

Esse e outros títulos podem ser baixados gratuitamente em www.poisson.com.br
Entre em contato pelo contato@poisson.com.br

Índice Geral

Índice de Figuras iii
Lista de Abreviaturas e Siglas ix
Prefácio 1
Referências bibliográficas 4
Introdução 6
Quadro de Referência Teórico 22
Educação inclusiva, equidade e poder 22
Interacções sociais e modeladores pessoais de desempenho (MPD) 68
Metodologia 113
Participantes 116
Instrumentos de recolha de dados 120
Procedimentos 124
Resultados 129
Diferentes línguas maternas (L1), diferentes formas de fazer e aprender Matemática 129
Tarefa A 131
Tarefa B 145
Tarefa C 155
Tarefa D 162
Tarefa E 175
Características inovadoras do projecto IC 185
A primeira semana de aulas 185

O processo de avaliação implementado no projecto IC 187
Critérios de formação das díades.....192
Uma escola desafiadora e a mediação cultural bi-unívoca.....202
Mediação cultural bi-unívoca 205
Díade 1 – V. e M.: Da desconfiança e desagrado, à colaboração e admiração 208
Informações prévias – preparação do ano lectivo 208
A primeira semana de aulas: Conhecer melhor o V. e a M. 214
Trabalho em díade ao longo do ano lectivo.....225
Díade 2 – Tatiana e Tomás: Discriminação cultural, de género, empowerment e resiliência.....299
A primeira semana de aulas: Conhecer melhor a Tatiana e o Tomás.....299
Trabalho em díade ao longo dos anos lectivos 320
Considerações Finais.....385
Referências bibliográficas.....400
ANEXOS 417
ANEXO 1 Fichas de trabalho N.º 1 e N.º 2 – Equações 418
ANEXO 2 Grupos Capacidades e Competências – IACC.....423

Índice de Figuras

Figura 1 Modeladores Pessoais de Desempenho (MPD).....99

Figura 2 Nuvem de pontos dos MPD de alguns alunos já analisados anteriormente 100

Figura 3 Enunciado da Tarefa A.....132

Figura 4 Raciocínio espacial e geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, RC – L1: crioulo 133

Figura 5 Estratégia de resolução por representação gráfica – L1: crioulo.....134

Figura 6 Raciocínio analítico e estratégia de resolução aritmética – L1: português.....134

Figura 7 Estratégia de resolução aritmética – L1: português.....135

Figura 8 Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática – L1: português.....136

Figura 9 Raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, RC – L1: crioulo 137

Figura 10 Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática e estratégia algébrica – L1: português.....137

Figura 11 Raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, complementada com uma composição matemática – L1: crioulo 139

Figura 12 Estratégia de resolução baseada numa composição matemática – L1: português.....140

Figura 13 Raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, complementada com uma composição matemática – L1: crioulo 141

Figura 14 Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática e estratégia aritmética – L1: português 142

Figura 15 Raciocínio analítico e estratégia de resolução aritmética – L1: português.....143

Figura 16 Raciocínio analítico e estratégia de resolução algébrica – L1: português.....143

Figura 17 Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática – L1: português.....144

Figura 18 Enunciado da Tarefa B 145

Figura 19 Raciocínio espacial e estratégia de resolução por representação gráfica – L1: crioulo 146

Figura 20 Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática – L1: português.....147

Figura 21 Raciocínio espacial e estratégia de resolução por representação gráfica, com esboço de estratégia de resolução aritmética – L1: crioulo 148

Figura 22 Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática – L1: português.....149

Figura 23 Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática e estratégia de resolução aritmética – L1: português.....150

Figura 24 Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática e estratégia de resolução aritmética – L1: português.....151

Figura 25 Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática – L1: português.....152

Figura 26 Raciocínio espacial e estratégia de resolução por representação gráfica, complementada com uma estratégia de resolução aritmética – L1: crioulo.....153

Figura 27 Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática – L1: português.....153

Figura 28 Raciocínio analítico e estratégia de resolução aritmética – L1: português 154

Figura 29 Raciocínio analítico e estratégia de resolução aritmética, complementada com uma composição matemática e uma representação gráfica – L1: português 154

Figura 30 Enunciado da Tarefa C 156

Figura 31 L1: português 156

Figura 32 RA, dificuldades visuais – L1: crioulo 157

Figura 33 RA – L1: crioulo 159

Figura 34 RC – L1: português 159

Figura 35 RC – L1: crioulo 161

Figura 36 RA – L1: crioulo 162

Figura 37 Enunciado da Tarefa D 163

Figura 38 Raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica – L1: crioulo 164

Figura 39 Raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, complementada com uma composição matemática; RC – L1: crioulo 165

Figura 40 Raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, complementada com uma pequena composição matemática, RA – L1: crioulo 166

Figura 41 Raciocínio analítico e estratégia de resolução aritmética, RC – L1: português 167

Figura 42 Abordagem global, raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, complementada por uma estratégia de resolução aritmética, RA – L1: crioulo (Tatiana) 168

Figura 43 Abordagem global, raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, complementada por uma estratégia de resolução aritmética, RA – L1: crioulo (V.) 170

Figura 44 Raciocínio analítico e estratégia de resolução aritmética, complementada por uma composição matemática, RA – L1: português 171

Figura 45 Raciocínio analítico e estratégia de resolução aritmética, complementada por uma representação gráfica, RA – L1: português 171

Figura 46 Raciocínio analítico e estratégia de resolução algébrica, complementada com uma estratégia de resolução aritmética – L1: português (Tomás) 172

Figura 47 Raciocínio analítico e estratégia de resolução algébrica, RA – L1: português 173

Figura 48 Raciocínio analítico e estratégia de resolução algébrica – L1: português 174

Figura 49 Enunciado da Tarefa E, quando se usavam escudos 176

Figura 50 Enunciado da Tarefa E, quando se passaram a usar euros 176

Figura 51 Abordagem passo-a-passo, estratégia de resolução baseada numa composição matemática, RC – L1: português 176

Figura 52 Abordagem passo-a-passo, estratégia de resolução aritmética, RC – L1: português 177

Figura 53 Abordagem passo-a-passo, estratégia de resolução aritmética, RA – L1: português 178

Figura 54 Abordagem passo-a-passo, estratégia de resolução aritmética, RA – L1: português 178

Figura 55 Abordagem passo-a-passo, estratégia de resolução baseada numa composição matemática, RA – L1: português 179

Figura 56 Abordagem passo-a-passo, baseada num esboço de representação gráfica e numa estratégia de resolução aritmética, RA – L1: português 180

Figura 57 Abordagem passo-a-passo, estratégia de resolução: aritmética e esboço de representação gráfica – L1: português 180

Figura 58 Abordagem passo-a-passo, estratégia de resolução algébrica, RA – L1: português 181

Figura 59 Abordagem global, estratégia de resolução aritmética, com esboço de representação gráfica (setas) – L1: crioulo 182

Figura 60 Abordagem global, estratégia de resolução baseada numa composição matemática e estratégia de resolução aritmética (subentendida) – L1: crioulo 182

Figura 61 Abordagem global, estratégia de resolução aritmética, RA – L1: crioulo 182

Figura 62 Abordagem global, baseada numa composição matemática e estratégia de resolução aritmética, RA – L1: crioulo 183

Figura 63 Abordagem passo-a-passo e global, estratégia de resolução aritmética e esboço de representação gráfica (setas), RA – L1: crioulo 184

Figura 64 Nuvem de pontos dos MPD na turma do V. e da M. 196

Figura 65 Nuvem de pontos dos MPD na turma da Tatiana e do Tomás 201

Figura 66 Tarefa A – Resolução do V. – L1: crioulo 221

Figura 67 Enunciado das Tarefas 1 e 2, Ficha de Trabalho N.º 1 228

Figura 68 Enunciado da Tarefa 3, Ficha de Trabalho N.º 1 234

Figura 69 Enunciado da Tarefa 4, Ficha de Trabalho N.º 1 235

Figura 70 Enunciado da Tarefa 5, Ficha de Trabalho N.º 1 241

Figura 71 Enunciado da Tarefa 6, Ficha de Trabalho N.º 1 244

Figura 72 Tarefa A – Resolução da Tatiana – L1: crioulo 303

Figura 73 Tarefa B – Resolução da Tatiana – L1: crioulo 310

Figura 74 Esquema elaborado pela Tatiana e pelo Tomás 337

Figura 75 Esquema desenhado pela Tatiana 344

Lista de Abreviaturas e Siglas

A., AM., J., M., N., T. e V. – Abreviaturas de nomes de participantes

AESE – Apoios Educativos e Sociais Especializados

AFIRSE – *Association Francophone Internationale de Recherche Scientifique en Education*

APM – Associação de Professores de Matemática

AR – Assembleia da República

APAV – Associação Portuguesa de Apoio à Vítima

BINOP – *Bulletin de l'institut national d'étude du travail et de l'orientation professionnelle*

CI – Conversa Informal

CIEFCUL – Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Covid – Coronavírus (pandemia, em 2020 e 2021)

D – Documento

DB – Diário de Bordo (dos professores/investigadores)

DEFCUL – Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

DGEEC – Direcção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência

DGES – Direcção-Geral do Ensino Superior

DST – *Dialogical Self Theory*

E – Entrevista

E1 – Entrevista 1

E2 – Entrevista 2 e assim sucessivamente

ECD – Estatuto da Carreira Docente

Ex: – Exemplo

FAMA – *Family Maths for Adult Learners* (projecto de investigação financiado pela UE – União Europeia)

FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia

FCUL – Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

FCM-UNL – Faculdade de Ciências Médicas da Universidade Nova de Lisboa

FCT-UNL – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

FMH-UTL – Faculdade de Motricidade Humana da Universidade Técnica de Lisboa

FPCEUL – Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Lisboa

IACC – Instrumento de Avaliação de Capacidades e Competências

IAP – *Information Age Publishing*

IC – *Interacção e Conhecimento* (projecto de investigação)

IIE – Instituto de Inovação Educacional

IK – *Interaction and Knowledge* (research project)

INCM – Imprensa Nacional Casa da Moeda

INE – Instituto Nacional de Estatística

INRP – *Institut National de Recherche Pédagogique*

JNE – Júri Nacional de Exames

L1 – Língua materna

LGP – Língua Gestual Portuguesa

MaSdiV – *Supporting Mathematics and Science teachers in addressing diversity and promoting fundamental values* (projecto de investigação)

Mat789 – Projecto de investigação desenvolvido em aulas de Matemática, do 7.º, 8.º e 9.º ano de escolaridade

ME – Ministério da Educação

MEC – Ministério da Educação e Ciência

MPD – Modeladores Pessoais de Desempenho

NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics*

NEE – Necessidades Educativas Especiais

O – Observação

OCDE – Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico

PPS – *Personal Performance Shapers*

Prof. – Professor/investigador

Q – Questionário

Q1 – Questionário 1

Q2 – Questionário 2 e assim sucessivamente

Q1 do *Scopus* – Quartil 1 (cotação mais elevada) da base de dados *Scopus*

Q2 do *Scopus* – Quartil 2 da base de dados *Scopus*

RA – Raciocínio Abstracto

RAE – Relatório de Avaliador Externo

RC – Raciocínio Concreto

RE – Relatório de Observador Externo

RI – Relatório de Observador Interno

SASE – Serviços de Acção Social Escolar

SEEI – Secretaria de Estado da Educação e Inovação

SIQE2 – Sistema de Incentivos à Qualidade na Educação 2 (medida do IIE)

SPCE-SEM – Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação – Secção de Educação Matemática

SSI – Sistema de Segurança Interna

TA (Tatiana) e TO (Tomás) – abreviaturas de nomes de alunos usadas nos excertos interactivos e Figuras 2 e 65

TIP – Tarefa de Inspiração Projectiva

TIP1 – Tarefa de Inspiração Projectiva 1

TIP2 – Tarefa de Inspiração Projectiva 2 e assim sucessivamente

UAB – *Universitat Autònoma de Barcelona*

UNESCO – *United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization*

WISC – *Wechsler Intelligence Scale for Children*

ZDP – Zona de Desenvolvimento Proximal

Prefácio

> "Quando te aproximares deste aluno tem cuidado para que ele te veja a aproximar de frente, porque senão pode dar-te um murro sem pensar."

É mais ou menos assim que recordo o que me disse a Margarida César, numa reunião de preparação para ir assistir a uma aula de uma professora estagiária. Eu era o orientador do Departamento de Matemática e ela era a orientadora do Departamento de Educação, ambos da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL). A turma incluía diversos alunos expulsos de outras escolas. Mas a professora estagiária conseguia leccionar as aulas de Matemática a esta turma. E era habitual, entre os professores estagiários orientados pela Margarida César, terem as piores turmas, mas mesmo assim conseguirem gostar das aulas de Matemática que decorriam nessas turmas.

Nos anos em que colaborei nestes estágios, além de assistir a aulas, participava em diversas reuniões dos núcleos de estágio e percebia que havia muito trabalho para a formação das díades, mas não sabia como tudo era organizado. Algum tempo mais tarde percebi que a investigação tinha tido um resultado muito interessante: numa díade, o elemento com melhores resultados a Matemática podia beneficiar com a interacção. Não se tratava de ser o mais competente a ajudar o menos competente, mas sim de uma colaboração com benefício mútuo (César, 2000).

Com a leitura deste livro tive, pela primeira vez, uma imagem completa do que estava por detrás dos resultados surpreendentes na sala de aula, obtidos no âmbito do projecto *Interacção e Conhecimento* (IC). Encontra-se aqui o quadro de referência teórico, a metodologia com instrumentos próprios, e alguns resultados detalhados do trabalho desenvolvido ao longo de anos.

Este livro é especialmente importante numa época em que tanta gente se acomoda facilmente a visões do ensino e da aprendizagem que ignoram completamente a diversidade e a complexidade dos seres humanos envolvidos. A

facilidade com que se imagina que na escola tudo se resume a uma transferência de "conhecimentos" do professor para o aluno, mensurável com um número num intervalo à escolha, não deixa de ser surpreendente.

Mas, na verdade, somos todos diferentes. Até nos aspectos mais evidentes e mensuráveis, como as dimensões do nosso corpo. Podemos pensar que somos apenas variações em torno de uma média ideal. Foi assim que nos anos trinta e quarenta do século XX a Força Aérea dos EUA desenvolveu os *cockpits* dos aviões: usou as dimensões médias de centenas dos seus pilotos. Contudo, no início da década de cinquenta havia tantos acidentes atribuídos aos pilotos que houve necessidade de fazer um novo estudo (Rose, 2015). Foi então que o cientista responsável percebeu que nenhum dos 4063 homens, cujas dimensões foram tomadas no novo estudo, conseguia estar dentro de valores próximos das médias quando considerava 10 dimensões específicas do corpo. Ter uma estatura próxima da média (1055 em 4063) não garantia ter também o perímetro do tronco próximo da média (apenas 302). E destes, apenas 143 estavam próximos da média se se considerasse ainda o comprimento do braço (Daniels, 1952). Após o décimo critério, não restava nenhum. O piloto médio simplesmente não se encontrava. E desenhar um *cockpit* para esse piloto médio colocava todos os pilotos em risco. A solução passou por criar um *cockpit* com posicionamento variável para assentos e instrumentos, como hoje temos nos automóveis. Não é a pessoa que se adapta ao dispositivo, é o dispositivo que se adapta à diversidade das pessoas.

Se, nas dimensões físicas, somos muito mais diversos do que seríamos se fôssemos apenas variações de tamanho em torno de um modelo médio comum, quando se trata de aprender e fazer Matemática também é de esperar que haja diversidade. Poincaré notava diferentes formas de trabalhar, contrastando abordagens mais analíticas e lógicas, em Weierstrass, com abordagens mais geométricas e intuitivas, em Riemann (Verhulst, 2012). Burton (2004) entrevistou 70 matemáticos, em diversas fases da carreira, e identificou três estilos de pensamento em Matemática: visual, analítico e conceptual. Muito poucos destes matemáticos usavam os três estilos e alguns usavam apenas um.

Também os alunos usam preferencialmente certas abordagens, raciocínios e estratégias de resolução para resolver problemas. Neste âmbito é muito

interessante a descoberta, com base nos dados recolhidos durante o projecto *Interacção e Conhecimento* (IC), de que há uma relação entre a natureza da língua materna (L1) e a abordagem, raciocínio e estratégia de resolução preferidos perante um novo tipo de problema (César, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b).

Pela complexidade que caracteriza os alunos, nomeadamente quando fazem e aprendem Matemática, é importante conhecê-los atempadamente, tendo isso em consideração desde o início do ano lectivo. Para um melhor conhecimento dos alunos e para a formação das díades, à dimensão das classificações académicas é acrescentada uma outra dimensão, abrangendo capacidades e competências, chegando-se ao conceito inovador de modeladores pessoais de desempenho (MPD) (César, 2024b).

Entretanto, os alunos e os professores não são meras máquinas cognitivas. São pessoas com emoções e com um contexto cultural em que cresceram. Também neste aspecto é grande a diversidade dos alunos nas escolas, em Portugal. Quando, em vez de se ignorar a diversidade, se assume como um dado e se procura uma educação intercultural e inclusiva, tornam-se possíveis muitos objectivos que pareciam irrealizáveis. Porque é importante reconhecer a cultura e a forma de pensar dos alunos para que estes possam depois abrir-se a outras culturas e formas de pensar e é importante distribuir o poder. Aqui surge o conceito de mediação cultural bi-unívoca (César, 2017), inovador e que explica muito do que resulta e também do que falha, apesar das boas intenções de quem concebe algumas medidas de mediação cultural unívoca.

Além do enquadramento teórico, não se pode deixar de referir os resultados. Acompanhamos a evolução de alguns alunos (quer na Matemática, quer nos relacionamentos pessoais nas díades) durante o tempo em que estiveram em turmas participantes no projecto. Mas, porque o estudo teve um *follow-up* formal e informal muito longo, é também possível saber de alguns dos protagonistas mais de 20 anos depois de terem participado no projecto IC. Estas histórias de vida são a expressão daquilo que é denominado trajectórias de participação ao longo da vida (César, 2009). E é possível compreender o impacto que esta forma de educar teve em múltiplos aspectos das vidas dos alunos.

O quadro de referência teórico inclui também propostas para as múltiplas dimensões de uma educação humana e de qualidade: a necessidade de uma Escola onde os alunos se sintam seguros, a qualidade relacional, a importância do papel dos professores enquanto decisores curriculares, as implicações em termos de formação inicial.

Escolhi algumas frases do livro que exprimem a profundidade das suas propostas e que não podem ser separadas da qualidade dos resultados obtidos:

> "Freire (…) considerava que qualquer prática educativa deveria ser "um acto de grande amor pelo mundo e pelo homem" (p. 28)

> "João dos Santos considerava que existiam dois domínios fundamentais para garantir a democracia e a liberdade: a Saúde e a Educação." (p. 48)

> "Não há casos perdidos, há é casos que não têm soluções rápidas e em que é preciso investirmos muito, antes de vermos resultados (…)" (p. 59)

Este livro, sobre a experiência da educação intercultural e inclusiva que concretizou e viveu estas frases, ajuda-nos a ver os outros e a perceber que todos ficamos melhor quando colaboramos. Ajuda-nos a perceber que educar é começar a viver já o futuro.

Este é um livro que vale a pena ler, porque nos humaniza.

Carlos Albuquerque

Professor do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (DMFCUL)

Referências bibliográficas

Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Springer Science+Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-7908-5

César, M. (2000). Interacções sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: A investigação contextualizada. In J. P. Ponte, & L. Serrazina (Eds.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália: Actas da escola de Verão em educação matemática, 1999* (pp. 5-46). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE) – Secção de Educação Matemática (SEM). https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/ESCOLA_DE_VERAO_1999.pdf

César, M. (2009). Listening to different voices: Collaborative work in multicultural maths classes. In M. César, & K. Kumpulainen (Eds.), *Social interactions in multicultural settings* (pp. 203-233). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087907174_010

César, M. (2017). Trajectoire de vie et de participation d'une femme qui partage la culture du Cap-Vert et du Portugal. *Diplômées*, July 2017, 260-261, 86-111. https://www.associationdesfemmesdiplomees.fr/diplômées/

César, M. (2024b). Personal performance shapers (PPS): Their importance in Mathematics achievement and in pupils' empowerment. *GAS Journal of Education and Literature* (GASJEL), *1*(4), 67-84. https://doi.org/10.5281/zenodo.14030298

César, M., & Machado, R. (2024a). Different languages, different Mathematics learning. *Journal of Research in Mathematics Education (REDIMAT), 13*(2), 180-197. https://doi.org/10.17583/redimat.14421

César, M., & Machado, R. (2024b). Respecting cultural diversity in Mathematics classes. *GAS Journal of Education and Literature* (GASJEL), *1*(4), 96-114. https://doi.org/10.5281/zenodo.14131090

Daniels, G. S. (1952). *The "Average Man"?*. Technical Note WCRD 53-7. United States Air Force (USAF). https://doi.org./10.21236/AD0010203

Rose, T. (2015). *The end of average: How we succeed in a world that values sameness*. HarperCollins Publishers.

Verhulst, F. (2012). The interaction of geometry and analysis in Henri Poincaré's conceptions. *Nieuw archief voor wiskunde*, *5-13* (3), 209-216.

Introdução

Em 2024 comemoram-se 30 anos da assinatura da Declaração de Salamanca (UNESCO, 1994), um marco na definição, divulgação e disseminação da educação inclusiva. Este documento foi subscrito por representantes de 92 governos e 25 organizações internacionais, o que ilustra a relevância que, nessa época, lhe foi atribuída. Porém, apesar destes ideais serem assumidos em vários documentos de política educativa, nomeadamente em Portugal (AR, 2008, 2018), o fosso entre os discursos e as práticas (ainda) é muito grande. Muitos dos alunos que participam em minorias socialmente desvalorizadas não encontram resposta para as necessidades educativas que apresentam, sentindo-se pouco respeitados nos seus direitos. Isto tanto acontece com aqueles que, segundo César, Machado e Ventura (2014), precisam de Apoios Educativos e Sociais Especializados (AESE) (ex: surdos, cegos, autistas, entre outros), como com os que participam em culturas socialmente desvalorizadas (ex: cultura cabo-verdiana; cultura cigana). Apesar da Constituição Portuguesa (AR, 2005) afirmar que não pode existir discriminação de género, étnica ou racial, o que as pessoas vivenciam, no quotidiano, dentro e fora das escolas, é bem diferente.

Continua a existir discriminação de género, nomeadamente em relação às mulheres, que mais frequentemente referem episódios de agressões verbais e físicas, *bullying*, ou uma maior dificuldade em conseguirem empregos compatíveis com as habilitações literárias que concluíram. Segundo as últimas estatísticas da Associação Portuguesa de Apoio à Vítima (APAV, 2023), referentes aos anos de 2020-2022, as queixas por *bullying*, que levam a um acompanhamento por parte desta associação, têm vindo a aumentar, passando de 42 vítimas (2020) para 118 (2022), o que corresponde a um aumento de cerca de 180%, o que significa que esse número quase triplicou em dois anos. Como estes números se referem apenas aos que apresentaram queixa e foram acompanhados pela APAV, estarão certamente sub-representadas as pessoas vítimas de *bullying*, o que torna estes dados mais preocupantes. O mais grave é que, em 81.7% destas queixas, o *bullying* ocorreu num estabelecimento de ensino, o que ilustra o trabalho que

ainda é necessário fazer para se promover uma educação intercultural e inclusiva, tornando as escolas espaços onde os diversos alunos se sintam acolhidos e em segurança.

No que se refere à discriminação de género, na violência doméstica, a maioria das vítimas são mulheres: 81% das pessoas apoiadas pela APAV (APAV, 2024), nas estatísticas referentes a 2021-2023, que assinalam um aumento de 19.7% em relação a estatísticas anteriores. Geralmente, este tipo de crimes também envolve crianças, que vivem na mesma casa e o vivenciam por observação, ou também sendo agredidas. Por isso mesmo, constitui uma evidência da falta de protecção que sentem algumas crianças, que são profundamente afectadas por viverem em ambientes tóxicos, onde não se sentem seguras, nem acolhidas nas suas necessidades básicas, onde a violência, física e psicológica, faz parte do quotidiano. Quando vivem em ambientes onde existe violência doméstica, é muito mais difícil que estas crianças estejam disponíveis, mental e emocionalmente, para aprenderem os conteúdos ensinados na escola, pelo que estas vivências têm, geralmente, repercussões negativas nos seus desempenhos académicos (Strecht, 2008).

Por outro lado, aqueles que participam em culturas socialmente desvalorizadas, relatam frequentemente episódios de racismo, tanto presencial, nas escolas, empregos e na rua, como nas redes sociais, algo que se agravou nos últimos anos, com grupos de extrema-direita que usam discursos xenófobos e misóginos, que proliferam na esfera política e nas redes sociais. Estes episódios de racismo podem ter como vítimas crianças, adolescentes e jovens adultos, constituindo evidência da exclusão que muitos ainda vivenciam, como também relatam César (2009, 2013b, 2017) e César e Machado (2024a, 2024b). Assim, muito trabalho necessita de ser feito, nas escolas e na sociedade, para se promover uma educação e uma sociedade interculturais e inclusivas, garantindo mais equidade e justiça social, mostrando mais respeito e valorização da diversidade, que caracteriza o mundo. Essa diversidade existe desde sempre, mas tornou-se mais conhecida e debatida com o fácil acesso à informação que caracteriza a sociedade actual, onde os *media* e as tecnologias digitais permitem saber, em tempo real, o que se passa no mundo, tornando mais evidentes as enormes diferenças de oportunidades que existem entre ricos e pobres.

Um estudo de Alves (2023), realizado em Portugal e com uma duração de 24 anos (1996-2020), mostra a existência de discriminação racial por parte das forças policiais. Neste período, 36% das mortes por intervenção policial foram de pessoas não-caucasianas. Uma pessoa de etnia cigana tinha 43 vezes mais probabilidade de ser morta pela polícia e uma pessoa negra 21 vezes mais. Estes fenómenos são mais chocantes se tivermos em consideração que, segundo o *Censsus* 2020 (INE, 2021), apenas 0.4% da população que vivia em Portugal era de etnia cigana e 0.9% era negra. Para além disso, a Amnistia Internacional, em diversos relatórios que se referiam a Portugal, elaborados ao longo dos últimos 25 anos, também apontou para a necessidade de evitar formas de atuação discriminatórias, de género e do ponto de vista racial, por parte das forças policiais. Portanto, apesar de a Constituição Portuguesa (AR, 2005) considerar todos iguais perante a lei, na vida quotidiana, o que estas pessoas vivenciam contraria o que está escrito na lei. Elas têm de lutar muito mais e revelar muita resiliência para traçarem as suas trajectórias de participação ao longo da vida (César, 2009), enfrentando obstáculos nos diversos contextos: escolar, familiar, social e profissional (César, 2013a, 2013b, 2017, 2024b).

Continua também a existir discriminação negativa de género, em Portugal e em muitos outros países, recebendo as mulheres, em média, salários inferiores pelo desempenho das mesmas funções. Um estudo recente, realizado em Portugal e envolvendo 5000 jovens, refere que estas disparidades são maiores entre os 18 e os 35 anos de idade (Carmo, Tavares, Assis, Barradas, & Suleman, 2024). Para além disso, são as mulheres que mais frequentemente são vítimas de assédio sexual, nos diversos contextos, incluindo o educativo, o social e o profissional, bem como de violência doméstica, que abrange o contexto familiar. Segundo o relatório de Segurança Interna Nacional (SSI, 2024), no crime de tráfico de pessoas observa-se um enorme aumento, cuja "variação reflete, no período em análise, um acréscimo em termos percentuais de 158%" (p. 53), sendo as mulheres e as crianças, sobretudo as de meios sócio-culturalmente desfavorecidos, bem como os homens de países em guerra, ou com poucas oportunidades laborais, particularmente vulneráveis a serem vítimas de tráfico humano, uma das formas mais violentas de subjugação de pessoas.

No meio laboral, apesar das mulheres já serem maioritárias em muitos cursos do ensino superior e os terminarem com médias mais elevadas, concluindo doutoramentos mais cedo, na academia estão sub-representadas em cargos de chefia onde, por exemplo, raramente são reitoras. Também há menos mulheres no topo das carreiras (professoras catedráticas), ou em órgãos como o Senado. Por isso, em profissões onde as tabelas salariais não discriminam em função do género, pois os salários para cada categoria são fixos, como acontece na academia, existem, na mesma, formas subtis de discriminação de género, como as que anteriormente descrevemos. Aqui, se as mulheres não são impedidas de entrar na carreira universitária, são subtilmente desencorajadas de progredirem na carreira e, se o tentarem fazer, confrontam-se com muito mais obstáculos do que os seus pares masculinos, como mostram os dados referentes aos cargos de topo desempenhados por mulheres, na academia.

Também em cargos políticos de topo as mulheres estão sub-representadas: em Portugal, em 50 anos de democracia, nunca houve uma mulher que fosse Presidente da República e apenas tivemos, num período breve (7 de Julho de 1979 a 3 de Janeiro de 1980), Maria de Lurdes Pintassilgo, que foi Primeira-Ministra. Mas, se pensarmos em grandes potências, como os Estados Unidos da América, onde em 1787 foi promulgada a Constituição Federal dos Estados Unidos da América, que continua em vigor e estabelece um regime democrático, nunca existiu uma mulher que fosse Presidente da República. Portanto, num país com 237 anos de democracia, que advoga ser um exemplo de país democrático, nenhuma mulher desempenhou este cargo. Algo semelhante se passa em França, onde a democracia também existe desde finais do séc. XVIII, com a Primeira República Francesa e, até hoje, também nenhuma mulher ocupou o cargo de Presidente da República. Estes exemplos ilustram, de forma nítida, a discriminação negativa de género que as mulheres vivenciaram, e continuam a viver, em todo o mundo. Nas posições de topo, seja em que domínio for, ainda existe uma acentuada discriminação de género, prejudicando as trajectórias de vida e de participação das mulheres. Assim, esta é mais uma marca da falta de inclusão na sociedade, tanto mais notória quanto falamos de uma maioria, pois há mais mulheres do que homens no mundo. Mas nem sempre ser maioria é suficiente para não se

ser silenciado ou oprimido. Isso depende mais de quem detém o poder e de como o utiliza.

Um outro critério que não favorece a inclusão na educação e na sociedade é que, tanto nas classificações obtidas no percurso escolar, como nas oportunidades de trabalho a que têm acesso, as habilitações literárias dos pais são um critério de diferenciação social e de fortes níveis de desigualdade. Segundo divulgaram diversos *media* (rádio, televisão e jornais), o Júri Nacional de Exames (JNE) revelou que, nas provas finais de 9.º ano de escolaridade, em 2024, a prova de Matemática foi realizada por 94002 alunos. Metade obtiveram uma classificação negativa, ou seja, abaixo de 50%. A média nacional foi de 51%, mas 96% das escolas públicas têm média negativa a esta disciplina (Carmo, 2024). Considerando um outro critério, o nível económico, observamos algo preocupante, no que se refere à educação intercultural e inclusiva: só $\frac{1}{5}$ dos alunos pobres obteve uma classificação de nível positivo na prova final de Matemática. Algo semelhante e discriminatório se verificou no acesso ao ensino superior (1.ª fase), para o ano lectivo de 2024/25: foram colocados 1655 estudantes beneficiários do Escalão A de assistência social, o mais elevado, dos quais 1178 são do contingente prioritário, o que corresponde a uma diminuição de entradas com carências económicas que, no ano lectivo anterior (2023/24), correspondiam a 2810 estudantes (DGES, 2024). Deste modo, observou-se um menor acesso ao ensino superior por parte dos estudantes economicamente carenciados, o que não corrobora os princípios da educação intercultural e inclusiva. Assim, o acesso ao sucesso escolar está fortemente configurado pelas habilitações literárias dos pais e pelo poder económico para pagar uma escola privada e/ou lições privadas de explicadores, nomeadamente de Matemática, bem como para os ajudarem a estudar, a tirar dúvidas sobre conteúdos escolares, ou a realizar trabalhos pedidos pelos professores.

Estes dados recentes corroboram, de forma agravada, outros referidos por César (2012a), César e Machado (2012) e César, Machado e Borges (2013), onde um projecto internacional, denominado FAMA (*Family Maths for Adult Learners*), analisava e discutia o papel das famílias no acesso ao sucesso escolar dos alunos, em Matemática, revelando também que as habilitações literárias dos pais eram um critério determinante para que os alunos atingissem classificações de

nível positivo, nomeadamente as mais elevadas. Em estudos internacionais, a relevância do estatuto sócio-económico no sucesso escolar, a diversas disciplinas, incluindo a Matemática, também é salientado por outros autores.

> Estudos anteriores (por exemplo, Artelt et al., 2003; Kim et al., 2015; Sirin, 2005) mostraram repetidamente a existência de uma relação estável e persistente entre o estatuto socioeconómico dos alunos e o desempenho académico. A relação é encontrada em diferentes disciplinas, incluindo matemática, ciências, leitura (Buckingham, Wheldall, & Beaman-Wheldall, 2003). (Ng, Graham, Renshaw, Cheung, & Mak, 2024, p. 2)

As últimas estatísticas de educação, referentes a 2021/22 (DGEEC, 2023), mostram que as retenções de alunos vindos do estrangeiro aumentaram 30%. Muitos destes alunos chegam a Portugal sem falar a língua portuguesa, que é a língua de instrução nas escolas públicas, sendo alguns deles refugiados, que corriam perigo de vida. Outros, como os que participam na cultura de Cabo Verde, são já de segunda ou terceira geração, pelo que são portugueses. Mas falam crioulo em casa e no bairro onde habitam, sendo nessa língua que pensam, contam, nomeadamente dinheiro, cantam, expressam emoções e sonham. Nesta cultura, a música e a dança fazem parte do quotidiano e eles aprendem a dançar desde muito pequenos, pois o movimento corporal é muito valorizado. João dos Santos, pedagogo e psicanalista português, salientava que "dançar, dramatizar, está, como se sabe, na origem de tudo o que é pensar" (Carvalho e Branco, 2000, p. 31). Mas dançar desenvolve também a noção de espaço, fundamental para os raciocínios espaciais e geométricos. Como ilustraram César (2024b) e César e Machado (2024a, 2024b), quando a língua materna (L1) é o crioulo, uma língua ideográfica, a maneira como os alunos raciocinam matematicamente, bem como as estratégias de resolução que preferem, são distintas das usadas por quem tem como L1 uma língua fonética, como o português. Em Portugal, sendo os professores das escolas públicas maioritariamente portugueses, cuja língua materna é o português (língua de instrução), tendem a valorizar mais as estratégias de resolução e os raciocínios em que se sentem mais confortáveis, algo que também se observa nos manuais escolares. Por isso, as práticas nas aulas de Matemática

dificultam o acesso ao sucesso académico dos alunos da cultura de Cabo Verde, bem como de outras culturas cuja L1 é ideográfica e baseada numa forte tradição oral e numa menor tradição escrita, algo que é ignorado pela maioria dos professores.

Halai e Clarkson (2016), referindo-se a outros contextos e países, também realçam a relevância da L1 nas aprendizagens matemáticas e como a língua de instrução, reconhecida na sala de aula e nos manuais escolares, se for assumida como língua dominante, pode levar à marginalização dos alunos que não a dominam. Esta é uma questão diferente da que discutem César (2024b) e César e Machado (2024a, 2024b) pois, nestas análises, os alunos dominavam a língua de instrução (português). Porém, ao terem como L1 uma língua ideográfica, preferiam outras abordagens dos problemas, raciocínios e estratégias de resolução, que os professores, geralmente, não aceitavam. Halai e Clarkson (2016) analisam casos que provocam uma exclusão mais visível: a daqueles que não dominam a língua de instrução e, que, por isso mesmo, se sentem marginalizados, em aula, por não conseguirem compreender o que é dito e escrito, nomeadamente no quadro.

> Assim, a língua que obtém reconhecimento oficial na sala de aula é invariavelmente a língua da elite poderosa, ou a língua dominante da sociedade, ou, no caso de contextos pós-coloniais, a língua dos colonizadores. Usando este papel sócio-político da língua no quadro de aprendizagem, surgem questões bastante diferentes para o ensino, a aprendizagem e o currículo para alunos marginalizados linguisticamente que vão além da questão da cognição (por exemplo, imigrantes, alunos de segunda língua, outros). (Halai & Clarkson, 2016, p. 3)

Pelo que acima foi dito, apesar dos progressos educativos a que a Declaração de Salamanca (UNESCO, 1994) deu origem, muito necessita de ser feito para passarmos dos ideais às práticas interculturais e inclusivas, garantindo maior equidade no acesso ao sucesso escolar e mais justiça social. Quando se comemoraram os 10 anos desta declaração (2004), César e Ainscow (2006) editaram um número especial do *European Journal of Psychology of Education*, que analisava como se tinha operacionalizado a educação inclusiva em diversas culturas, países

e continentes. Nestes artigos, apesar de se elencarem itens que precisavam de ser melhorados, havia um tom bastante positivo, de ânimo pelo que já tinha sido construído e esperança de melhorias futuras, mais acentuadas. Posteriormente, quando, em 2014, se comemoraram os 20 anos daquela declaração, Santos e Hamido (2014) editaram um número especial da revista *Interacções*. Nesse número, César e seus colaboradores (2014) afirmavam: "Se, em Portugal, são nítidos alguns passos, que vão nesse sentido, concretizados sobretudo na década de 90 do século XX e primeiros anos do século XXI, vivem-se também alguns retrocessos preocupantes" (p. 20). Nestes primeiros passos, inclui-se o primeiro documento legal que aborda os direitos dos alunos, que então se designavam como apresentando Necessidades Educativas Especiais (NEE). Apesar de anterior ao paradigma da educação inclusiva, já consagrava alguns direitos importantes para estes alunos (ME, 1991). No projecto *Interacção e Conhecimento* (IC) preferimos designá-los como alunos que precisam de Apoios Educativos e Sociais Especializados (AESE), alargando a necessidade destes apoios da esfera educativa, para a social (César et al., 2014). Se queremos promover a inclusão, a equidade e a justiça social, é necessário que as medidas existam nos dois contextos (educativo e social), fomentando a autonomia e a participação legítima (Lave & Wenger, 1991), mesmo nos domínios pessoal, social e profissional.

César (2012b) e César e seus colaboradores (2014) referiam como retrocessos o aumento do número de alunos nas turmas onde havia casos de AESE, a falta de formação inicial e contínua de professores e outros agentes educativos, no que se refere à educação intercultural e inclusiva, mesmo nas escolas de referência (AR, 2008, 2018), a distribuição destas escolas e de meios especializados no interior, sobretudo no Alentejo e Algarve, onde eram manifestamente insuficientes, ou a inexistência de legislação adequada no ensino superior. Outros autores, como Baraldi, Rosa, Capellini, Rosa e Miranda (2019), fazendo uma reflexão sobre o que se conseguiu, 25 anos após a assinatura da Declaração de Salamanca (UNESCO, 1994), assumem uma posição muito mais negativa.

> As nossas reflexões levam-nos a acreditar que a Declaração de Salamanca – que foi criada há quase 25 anos, para defender um sistema educacional inclusivo e, consequentemente, a necessidade da educação profissional para atingir esse

> objetivo – mobilizou, na realidade, poucas mudanças durante estas duas décadas. (Baraldi et al., 2019, p. 37)

Em 2024, quando se comemoram os 30 anos da Declaração de Salamanca (UNESCO, 1994), as preocupações mencionadas por César (2012b) e César e seus colaboradores (2014) acentuaram-se. Se observamos alguns sinais positivos, como uma maior conclusão de cursos do ensino superior por parte de alunos que necessitam de AESE, acesso a empregos e mais actividades culturais em que participam, aquelas três preocupações mantêm-se. As condições, nas escolas públicas, pioraram significativamente, havendo falta de professores, por vezes durante todo o ano lectivo, menos verbas alocadas para estes alunos e mantendo-se a carência de professores e agentes educativos especializados, bem como a colocação de professores sem ter em conta a formação extra e especializada, daqueles que a realizaram (César, 2012b). Para além disso, uma alteração nas condições de acesso ao ensino superior para os alunos designados como "com deficiência" (ME, 2023), fez com entrassem neste grau de ensino, em 2023/24, apenas metade dos alunos que entraram em anos lectivos anteriores, tendo sido os alunos surdos os mais penalizados. Depois desta descida acentuada, muito criticada nos *media*, os resultados do concurso para a frequência do ensino superior em 2024/25, foram mais animadores, embora sem repor os valores anteriores: na 1.ª fase ficaram colocados 214 candidatos, o que corresponde a um aumento de 19.6%, face ao ano lectivo anterior (DGES, 2024). Porém, como tinha existido uma diminuição de cerca de 50% em 2023/24 (ME, 2023), estes números ainda são mais penalizantes para estes estudantes, do que eram até ao ano lectivo passado, revelando que a inclusão se transformou em exclusão, para muitos destes candidatos, comprometendo as suas expectativas escolares e profissionais.

Um outro estudo recente (Randstad, 2024), identifica, no que diz respeito ao perfil dos entrevistados, que 40% têm uma incapacidade relacionada com a mobilidade, 13% com a cognição ou a memória, 10% uma incapacidade visual e 7% uma auditiva. Além disso, 42% têm outros tipos de incapacidades, incluindo incapacidades psicossociais e mentais (como transtornos de saúde mental), doenças crónicas e orgânicas, condições autoimunes e imunológicas, e incapacidades neurológicas. Este estudo revela que a taxa de emprego para pessoas sem

incapacidade (67.2%) é superior em quase 25 pontos percentuais quando comparada com a taxa de emprego das pessoas com incapacidade (42.3%). Das pessoas com incapacidade, cerca de seis em cada 10 (59%) estão desempregadas e, destas, 62% são desempregados de longa duração. Para além disso, a população com incapacidade está sub-representada em quase todas as categorias profissionais que requerem uma maior qualificação, por exemplo, 11.1% em actividades intelectuais e científicas, contra 18.2% da população em geral. Por outro lado, há uma maior proporção de pessoas com incapacidade em trabalhos não qualificados (24.4% em comparação com 15.4% da população em geral). A grande maioria das pessoas entrevistadas (92%) acha difícil, ou muito difícil, encontrar um novo emprego. Entre as razões apontadas, 51% dos participantes identificam a própria incapacidade como o principal obstáculo, o que ilustra como ainda não temos uma sociedade inclusiva. Para além disso, 77% das pessoas com incapacidade não estão actualmente envolvidas em nenhum tipo de formação. As principais razões para não continuar a formação incluem a falta de condições financeiras (38%), a dificuldade de encontrar cursos adaptados à(s) sua(s) incapacidade(s) (16%) e problemas de acessibilidade e mobilidade (11%).

Mas talvez o mais preocupante seja como se ignoram, em Portugal, os 30 anos da Declaração de Salamanca (UNESCO, 1994), de que quase nem se ouve falar. Absorvidos por uma crise política que se arrasta em sucessivas eleições, pois os governos não cumprem os mandatos até ao fim, pelos diversos casos de corrupção, ou pelas comemorações dos 50 anos do 25 de Abril, esquecemo-nos de que a liberdade tem de ser para todos e, se a educação intercultural e inclusiva não for operacionalizada, uma percentagem elevada de alunos terá menos possibilidades de acesso ao sucesso escolar e a uma vida pessoal, social e profissional em que se sintam realizados. É preciso que a Escola seja um contexto securizante, onde todos se sintam respeitados e apreciados. Para que isso seja possível, é necessário investir muito mais na formação de professores, algo amplamente discutido por Leite e Sousa-Pereira (2023), que realçam a necessidade de formar professores para serem "decisores curriculares" (p. 1), evitando o que Freire (2002) designava por educação bancária, na qual "a educação se torna um ato de depositar, em que os educandos são os depositários e o educador o depositante" (p. 58). Nesta concepção de educação, o professor julga-se o único detentor do

saber e espera que os alunos adquiram os conhecimentos e modo de pensar que ele tem. Neste modelo acredita-se que os alunos aprendem todos da mesma maneira e não se respeitam as diferenças, não há espaço para o questionamento, não se valoriza a diversidade.

Perret-Clermont e Giglio (2024), referem-se principalmente à formação inicial, de professores estagiários, mas consideram que estas modalidades de formação também podem ser utilizadas na formação contínua. Segundo estes autores, deve privilegiar-se uma metodologia que permita aos professores desenvolverem dois aspectos essenciais e simultâneos:

> (1) posicionar-se como atores principais num palco onde são criativos na construção de oportunidades para os seus alunos se envolverem em atividades criativas, e (2) realizarem observações críticas do que está a acontecer, a fim de ajustarem progressivamente as suas ações e, refletindo sobre elas, ampliarem a sua compreensão dos processos em jogo. (Perret-Clermont & Giglio, 2024, pp. 113-114)

Assim, realçam a importância da criatividade dos professores, o que se relaciona directamente com a concepção de Leite e Sousa-Pereira (2023), de estes agirem como decisores. Mas focam um outro critério essencial: as observações críticas do que acontece, em aula, associadas à reflexão, como forma de compreensão dos processos que decorrem, bem como para monitorizarem a sua adequação ao que era pretendido. Este é um critério fundamental, mas frequentemente esquecido: avaliar os efeitos do trabalho que está a ser desenvolvido, para saber tomar decisões sustentadas sobre o que se deve continuar a fazer e o que precisa de ser mudado.

Em Portugal, na formação inicial e contínua de professores, nomeadamente de Matemática, a influência da L1 nas abordagens aos problemas, raciocínios matemáticos e estratégias de resolução, nem sequer é abordada. Mas, como descrevem César (2009, 2013a, 2013b, 2024b) e César e Machado (2024a, 2024b), respeitar os raciocínios e estratégias de resolução de cada aluno para, a partir deles, conseguirem aprender outros, é um passo essencial para promover a educação intercultural e inclusiva, a auto-estima positiva, a equidade e a justiça

social. Zittoun (2023) escreveu um livro sobre o prazer de pensar e considera que ele desempenha um papel fundamental no desenvolvimento das crianças e na aprendizagem, mesmo na vida adulta. Por isso, como realçam César (2024b) e César e Machado (2024a, 2024b), se as formas de pensar naturais para quem tem uma determinada L1 forem sistematicamente desvalorizadas ou proibidas em determinados contextos, como o educativo, estas pessoas perdem o prazer de pensar e isso prejudica o seu desenvolvimento e aprendizagem. Zittoun (2023) destaca cinco modalidades de pensar: (1) a curiosidade; (2) o prazer funcional de realizar uma tarefa; (3) o prazer da descoberta; (4) o prazer dialógico de pensar com os outros; e (5) um meta-prazer. Estas modalidades podem ser combinadas quando se resolvem tarefas. No projecto IC procurávamos desenvolver a curiosidade, conjugando-a com o prazer de resolver tarefas suficientemente abertas para incluírem, por vezes, a descoberta. Como se promovia o trabalho colaborativo e dialógico, a quarta modalidade estava presente e, ao fomentar a reflexão sobre as práticas e a vida, em geral, nomeadamente durante o *follow-up*, a última modalidade também era realizada.

Tal como Zittoun (2023), consideramos que pensar é uma actividade situada, configurada pelas experiências e interacções sociais que vivenciamos e pelos contextos, cenários e situações em que estas ocorrem. Zittoun (2023) considera que o prazer de pensar evolui com o tempo, ou seja, naquilo que César (2009) designa por trajectória de participação ao longo da vida. Para Zittoun (2023) o prazer de pensar abrange actividades tão diversas como raciocinar, compreender ou sonhar acordado e pode acontecer em contextos tão variados como o educativo, profissional, ou durante os tempos livres. Perret-Clermont (2024) realça a importância do mundo material e dos objectos: “Acções, percepções, pensamentos, organizam-se e elaboram-se no contacto, antecipação, confrontação com realidades materiais que passam a existir para a pessoa quando ela sente o prazer de agir, perceber, comunicar, lembrar-se, ou quando as emoções surgem face aos obstáculos” (p. 8). Assim, o prazer de pensar associa-se ao prazer de agir e interagir com o mundo e os objectos que dele fazem parte. Para César (2024b), um dos grandes desafios da escola intercultural e inclusiva é promover o prazer de pensar em todos os alunos, respeitando as suas formas naturais de raciocínio e estratégias de resolução, dando exemplos que contemplem todas as culturas,

evitando que alguns alunos tenham desempenhos e classificações académicas que se situam muito abaixo das suas capacidades e competências.

Por outro lado, a preparação dos professores do ensino regular, no que se refere a alunos que apresentam AESE (César et al., 2014) tem, geralmente, abordagens muito teóricas ou é trabalhada em unidades curriculares opcionais, o que significa que muitos dos professores do ensino regular não têm preparação suficiente para lecionarem estes alunos (César, 2012b). Como salientam César (2008, 2010, 2014, 2024b) e César e Machado (2025), a formação de professores é primordial para desenvolver uma consciência epistemológica (César, 2008, 2010), entendida como uma intervenção, seguida de reflexão, que informa a nova intervenção sobre o mundo, nomeadamente em contexto profissional. Assim, os professores compreendem mais aprofundadamente o mundo, particularmente o profissional, considerando-se agentes desse mundo, desenvolvendo acções que permitem transformá-lo. Segundo estes autores, é também essencial desenvolver a sensibilidade à diferença, a capacidade de observação das necessidades dos alunos e a adaptação das práticas, em aula, a essas mesmas necessidades. Isto significa assumir uma perspectiva sociocultural da aprendizagem (Muller Mirza & Grossen, 2024), que considera a complexidade do ser humano. Como afirmam estas autoras, "a aprendizagem não é um processo estritamente cognitivo, mas uma atividade que envolve as pessoas nas suas diversas facetas sociais, relacionais, identitárias e emocionais (Grossen, 2021; Muller Mirza & Tartas, 2023)." (Muller Mirza & Grossen, 2024, p. 27). Por isso mesmo, que os alunos se sintam acolhidos e respeitados, na sua diversidade, é um contributo fundamental para promover o acesso ao sucesso escolar. Como realçam estas autoras, "a educação para a diversidade cultural, ou educação intercultural, está ligada às dimensões emocionais pelo menos de duas maneiras: pelas disciplinas a ensinar e temas sensíveis a abordar, bem como pela especial importância que atribui à relação com a alteridade." (Muller Mirza & Grossen, 2024, p. 27).

César e seus colaboradores (2014) explicitam a formação de professores, inicial e contínua, que favorece uma educação intercultural e inclusiva: "Uma formação baseada na análise de casos reais, em discussões temáticas, em reflexões conjuntas, em observações de aulas de colegas, como aquela que foi proporcionada aos elementos da equipa central do IC." (p. 54). Neste mesmo artigo,

exemplificam como o *role-playing*, incluindo a preparação cuidada do cenário, em situação de intervalo, permitiu simular possíveis formas de actuação, da professora/investigadora, que favorecessem a aceitação e inclusão de um aluno com comprometimento cognitivo (J.), profundamente rejeitado pelos colegas. Estas sessões de formação contínua proporcionavam, também, um outro aspecto essencial: o trabalho colaborativo e dialógico, em equipa, que fazia com que os professores/investigadores não se sentissem sozinhos, pois tinham pares com quem podiam discutir possíveis formas de actuação, situações que consideravam terem sido favoráveis, bem como alturas de desânimo. Quebrar o isolamento é algo essencial para promover uma educação intercultural e inclusiva.

Uma formação de professores, inicial e contínua, de qualidade, não garante uma educação intercultural e inclusiva. Porém, a falta dela, impede que isso possa acontecer. Sem uma formação de professores de qualidade, não é possível operacionalizar os ideais da educação intercultural e inclusiva, mesmo que muitas verbas sejam alocadas para estes alunos. Sem que os alunos vivenciem esses mesmos ideais nas escolas e turmas que frequentam, não estamos a preparar cidadãos que, no presente e no futuro, saibam lidar com a diversidade, que caracteriza cada vez mais o mundo. Como nos disse tantas vezes, em diversas conversas, João dos Santos, psicanalista e pedagogo português, que assumiu o paradigma inclusivo *avant la lettre*, "construímo-nos na diferença", ou seja, é isso que nos torna únicos e irrepetíveis. Também Freire (1996) afirmava que "a inclusão acontece quando se aprende com as diferenças e não com as igualdades" (p. 108). César (2002) salientava um outro aspecto fundamental: "bem dizia o João dos Santos que só conseguimos pensar no que já conseguimos sentir!... ou, dito de outro modo, que a vida mental se constrói a partir dos afectos." (p. 98). Por isso mesmo, as escolas devem proporcionar oportunidades de desenvolvimento cognitivo, mas, para que isso aconteça, é essencial não negligenciar, como tantas vezes acontece, o desenvolvimento emocional e as relações interpessoais que se estabelecem, com os pares, mas também com outros agentes educativos. Para que isso seja possível, é preciso desenvolver a consciência epistemológica dos professores (César, 2008, 2010, 2012b), é necessário que as escolas sejam espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004), que esta autora define como espaços onde os alunos se sintam suficientemente seguros para questionar, explorar

dúvidas, debater ideias. A isso, acrescentou César (2009, 2013a, 2013b, 2024b), sem medo de serem julgados negativamente por serem diferentes da cultura dominante, por se terem enganado, ou não conhecerem um determinado significado ou assunto.

César e seus colaboradores (2014) sublinham uma característica que é essencial desenvolver, para promover uma educação intercultural e inclusiva: a qualidade relacional. Este é um critério essencial dos desempenhos dos professores, devendo ser desenvolvida na formação inicial e contínua. Participar, enquanto participante legítimo (César, 2009; Lave & Wenger, 1991), em projectos de investigação, incluindo na divulgação de resultados, permite desenvolver mais aprofundadamente a qualidade relacional, como estes autores referem.

> Estes resultados iluminam a importância da qualidade relacional, bem como das práticas desenvolvidas em aula, para as aprendizagens e o desenvolvimento dos alunos (...). A qualidade relacional é fortemente influenciada, nos professores, pela formação inicial e contínua, bem como pelas experiências profissionais. Participar em projectos de investigação em que as equipas trabalham colaborativamente, intervêm de forma reflectida e sustentada teoricamente, participam em discussões temáticas com especialistas nacionais e internacionais e disseminam os resultados obtidos em eventos da especialidade e através da escrita científica, numa procura continuada de melhoria das práticas profissionais, tem-se revelado essencial para a qualidade dos desempenhos docentes, dos quais é parte integrante e fundamental a qualidade relacional. (César et al., 2014, p. 64)

A Declaração de Salamanca (UNESCO, 1994) elencou barreiras a ultrapassar, identificou ideais, abriu possibilidades. Mas há muito caminho para andar. Berge e Santos (1976), quase vinte anos antes, sublinhavam: "É importante que os especialistas não estejam limitados à sua especialidade; é necessário que cada um compreenda o trabalho dos outros" (p. 89), algo que Farrell (2006) também realçou, quando se referia aos psicólogos que trabalhavam nas escolas e citou alguns exemplos em que as suas formas de actuação contribuíam para a educação inclusiva. Esta é uma questão em aberto: que os especialistas usem uma linguagem menos hermética, que trabalhem mais colaborativa e dialogicamente e, que, assim, contribuam para operacionalizar uma educação intercultural e

inclusiva. Mas, se os governos não alocarem mais verbas para a educação pública e gratuita, sobretudo na escolaridade obrigatória, os mais pobres, aqueles que participam em minorias sócio-culturalmente desvalorizadas, os imigrantes que foram forçados a fugir dos países devido a guerras, regimes totalitários, ou extrema pobreza, continuarão a ser negativamente discriminados e a não encontrar, na Educação e nos novos países, a esperança e os direitos, que queriam ver respeitados. Se, nas escolas e nas aulas, o empoderamento destes alunos não estiver na ordem do dia, não lhes estamos a dar possibilidades para se desenvolverem e aprenderem. Como afirmam Allan (2008), Armstrong e Moore (2004) e César e Santos (2006), divulgar exemplos bem-sucedidos de práticas inclusivas contribui para que estas possam ser implementadas por mais pessoas, em mais escolas, e mesmo noutros contextos. Foi essa a opção que assumimos neste livro.

Quadro de Referência Teórico

Educação inclusiva, equidade e poder

Rodrigues (2003) referia que a Escola, desde o seu início, enquanto instituição, não considerava a diferença, afirmando que "organizou-se com base numa 'indiferença às diferenças'." (p. 91, aspas no original). Apenas destinada a elementos de sexo masculino, acreditava-se, numa perspectiva *behaviourista*, que, se os professores ensinassem bem, os alunos aprendiam, e que todos o faziam da mesma maneira, sem necessitarem que a diversidade fosse considerada. Eram os alunos que se deveriam adaptar à Escola, não eram as práticas, em aula, que se deveriam adequar àqueles alunos específicos. Os que não se adaptavam às normas educativas, eram excluídos e, geralmente, culpabilizados pelo insucesso académico obtido. Como afirmava César (1994), considerava-se que, se os alunos tinham insucesso, era porque não se tinham esforçado o suficiente, não tinham estado atentos, ou não tinham as capacidades necessárias. Estas eram concebidas numa perspectiva estática, psicométrica, em que cada aluno nascia, ou não, com determinadas capacidades. Inicialmente, nem se consideravam as diversas capacidades, apenas a inteligência, medida através de provas psicométricas. Por isso mesmo, em inícios do séc. XX, concebeu-se, em França, a escala de inteligência de Binet-Simon (Binet & Simon, 1904), que permitia diferenciar os que iriam frequentar o ensino especial, por falta de capacidades para frequentarem o ensino regular, daqueles que a ele teriam acesso. Assim, na sua origem, a Escola não foi concebida para ser inclusiva. Por isso mesmo, durante muitos anos, a formação de professores também não contemplava os temas que poderiam promover uma educação intercultural e inclusiva. Começou por assumir um paradigma de segregação: uns íam para o ensino especial; outros para o ensino regular; e, quando o comprometimento cognitivo e/ou motor era maior, nem sequer frequentavam a Escola.

Posteriormente, durante o paradigma da integração, como afirma Rodrigues (2006), permitia-se uma participação tutelada, mas em que seria o aluno a

adaptar-se à Escola, pois esta não tinha em consideração as suas necessidades, interesses e características. Este autor, tal como César (2003), considera que a inclusão não é uma evolução ou um melhoramento do paradigma da integração, mas sim uma ruptura em relação a ele. Rodrigues (2006) aponta três motivos fundamentais para isso: (1) a integração não resolveu algumas das questões menos inclusivas da Escola, como o insucesso escolar e o abandono escolar precoce, ou a existência de escolas de ensino especial, frequentadas pelos que eram designados como "deficientes"; (2) o paradigma integrativo baseava-se numa divisão dos alunos em "normais" e "deficientes", proporcionando condições especiais de apoio a estes últimos; e (3) os alunos designados como "deficientes" apenas poderiam permanecer na Escola quando o seu comportamento e classificações académicas fossem considerados adequados. Assim, ao considerar apenas como diferença a deficiência, ao promover formas, por vezes subtis, de segregação, tal como afirmam César (2003) e Rodrigues (2006), o paradigma da integração é a negação do paradigma da inclusão, pois promove mais a exclusão.

Apesar de este "movimento da educação inclusiva", que introduziu um paradigma de educação diferente do da integração, ter surgido ligado às preocupações educativas do que então se designavam por "pessoas com deficiência" e ao ensino especial (Ainscow & Ferreira, 2003), posteriormente evoluiu para uma noção de "educação para todos", propondo a melhoria da Educação, em geral, para todo e qualquer indivíduo. Assim, como afirmam Ainscow e Ferreira (2003), "o alvo é transformar o sistema regular de ensino de forma a aumentar a sua capacidade para responder a todos os estudantes" (p. 106). Isto significa que, como já salientava Ainscow (1991), antes da Declaração de Salamanca (UNESCO, 1994), as questões organizacionais, nas escolas, eram fundamentais para se promover uma educação inclusiva. Era também necessário, como realça posteriormente (Ainscow, 1999), desenvolver a consciência dos professores, bem como a dos políticos, em relação às necessidades de um movimento com estas características, nomeadamente no que se refere à formação de professores e à atribuição de verbas destinadas a tornar viável a operacionalização da educação inclusiva.

Como salientava César (2003), aprofundando este tipo de questões, que levaram à necessidade de criar uma educação inclusiva, os paradigmas da

segregação e da integração deixaram de funcionar, sobretudo quando se alargou a escolaridade obrigatória, o que fez com que todos os alunos permanecessem mais anos na Escola, criando novos desafios ao sistema de ensino, aos decisores políticos, a quem concebe e operacionaliza a formação de professores e aos próprios professores, alunos, famílias e outros agentes educativos. A comunidade educativa, em geral, apercebeu-se de que o sistema educativo, tal como tinha funcionado até ali, estava em crise e precisava de ser mudado, para conseguir dar resposta à diversidade dos alunos que frequentavam a Escola.

> O ensino padronizado, concebido para um aluno-tipo, que se julgava existir (mas terá alguma vez existido?), deixou não só de fazer sentido, passou a não resultar (César, 2002), fazendo crescer as taxas de insucesso escolar e obrigando a comunidade educativa a questionar-se sobre as suas formas de actuação e sobre os princípios epistemológicos que lhe estão subjacentes. (César, 2003, p. 118)

Paralelamente, as sociedades também se tornaram mais heterogéneas, nomeadamente porque o fosso entre ricos e pobres se alargou muito mais, algo que continuamos a observar. Os movimentos migratórios acentuaram-se, em quase todo o mundo, levando Halai e Clarkson (2016) a considerar que "o multilinguismo, na sala de aula, passou a ser a norma e não a excepção" (p. 3). A aprendizagem em turmas multi-étnicas tinha também sido discutida por Abreu e Elbers (2005) que, referindo-se a diversos contextos, países e culturas, analisaram os desafios que estas turmas apresentavam e possibilidades de promoção do sucesso escolar. Este fenómeno das migrações também teve repercussões em Portugal. O país deixou de ser, essencialmente, um país de emigrantes, de portugueses pouco letrados e pobres, que procuravam melhores condições de vida e mais oportunidades noutros países, como acontecia desde a década de 50 até meados de 70, do século XX, para passar a receber muitas pessoas imigrantes, que aqui procuravam melhores condições de vida, ou fugir a guerras e perseguições. Por isso, o tecido social, em Portugal, também se alterou profundamente. Estas mudanças trouxeram novos desafios às escolas, como salienta César (2009, 2013a, 2013b, 2017, 2024b), nomeadamente no que concerne às práticas, em aula, que se pretende que deixem de ser centradas em professores activos, que falam e ensinam,

e em alunos passivos, que escutam calados e aprendem, supostamente todos ao mesmo tempo e da mesma maneira. Assim, passa-se de um paradigma centrado no ensino, para um mais focado na aprendizagem, em como cada aluno aprende (César, 2024b), que valoriza as interacções sociais (Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1985, 1997), muitas delas dialógicas (Renshaw, 2004), pelo que há confronto de posicionamentos, argumentações, experiências de vida, sendo esse dialogismo um motor das aprendizagens. Como Sfard (2001) salienta, a análise da comunicação, nas aulas de Matemática, permite compreender muitos aspectos até então desconhecidos, ou que não costumavam ser analisados.

Concebem-se as competências como conhecimento-em-acção (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999), ou seja, conhecimento que foi apropriado, ao qual foi atribuído um sentido (Bakhtin, 1929/1981; César, 2009) e que se consegue mobilizar em diversos contextos, estabelecendo conexões entre várias situações, ou entre a Matemática escolar e a vida real. É um conhecimento que tanto se consegue mobilizar quando se interage com pares e pequenos grupos, como quando se participa, individualmente, na discussão geral, explorando diversos tipos de raciocínio e estratégias de resolução. Para além disso, ao ser apropriado, é internalizado, pelo que se pode usar, de forma autónoma, quando se pensa, se resolvem tarefas individualmente e até na vida quotidiana. A importância de se ser capaz de recorrer aos conhecimentos de forma autónoma é também salientada por Sfard (2021).

> Na sala de aula de matemática, a tarefa dos alunos é individualizar o discurso historicamente estabelecido conhecido como matemático. "Individualizar a matemática" significa tornar-se capaz de participar neste discurso de forma competente, e não apenas quando conversa com os outros, mas também quando comunica consigo mesmo. Em outras palavras, é fazer da matemática o discurso do pensamento de alguém, aquele ao qual a pessoa recorre sempre que apropriado. É disso que se trata aprender matemática. (Sfard, 2021, p. 49)

O que Sfard (2021) designa por "individualizar a matemática" corresponde ao que César (2009, 2013b) ou César e seus colaboradores (2014) descrevem como apropriar conhecimentos atribuindo-lhes um sentido, o que corresponde a

um processo de internalização do conhecimento, que deixa de ter apenas um significado (social), para passar, quem aprende, a atribuir-lhe um sentido (pessoal). É este processo de internalização que o trabalho colaborativo e dialógico facilita, pois, o confronto com uma polifonia de vozes (Bakhtin, 1929/1981) e diferentes formas de fazer e aprender Matemática, promove a atribuição de sentidos e a apropriação dos conhecimentos, facilitando a posterior utilização noutros contextos, mesmo quando se trabalha individualmente (ex: testes e provas nacionais) ou quando se pensa.

Kullenberg e Säljö (2022) consideram que uma perspectiva dialógica, como a de Bakhtin (1929/1981), acentua a importância da pluralidade de vozes e da *agency*, mostrando as potencialidades de expressar opiniões de forma criativa e de aprenderem uns com os outros. Para Kloetzer e Tau (2024), "a perspectiva bakhtiniana contribui para conceptualizar a contradição, a alteridade e a multiplicidade no discurso e, por isso mesmo, no sujeito" (p. 237). Para eles, operacionalizar o dialogismo corresponde a "identificar a forma e a função das outras vozes, incluindo as de terceiros ausentes" (p. 237). Kloetzer e Tau (2024) consideram que as interacções sociais e as actividades partilhadas desempenham um papel fundamental na aprendizagem.

> O pensamento e a palavra próprios não emergem se não na imersão no pensamento e na palavra do outro, e na actividade social partilhada (Linell, 2003). O discurso de cada um é, assim, tecido por diálogos passados e antecipados com o outro. (Kloetzer & Tau, 2024, p. 237)

As perspectivas acima descritas são particularmente importantes numa época que se caracteriza pela diversidade, riscos imprevisíveis e uma crescente necessidade de uma reflexão crítica, nomeadamente em relação ao que se lê e vê nos *media*. Como realçou César (2002), a Escola passou a ser concebida como "um espaço-tempo de diálogo(s) (entre)cruzado(s)" (p. 118), o que iluminou a importância dos processos interactivos na aprendizagem, nomeadamente da Matemática (César & Kumpulainen, 2009; Roth & Radford, 2011; Sfard, 2001, 2008; Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1985, 1997). A escolha do verbo "iluminar" prende-se com a maneira como concebemos a investigação: esta põe

o foco, uma luz, sobre o que acontece numa determinada situação e, assim, torna-a visível, ou seja, ilumina, o que está a acontecer, aquilo que, mesmo sendo relevante, de outra forma poderia ficar na sombra e, por isso mesmo, não ser visto.

> Estas mudanças tiveram como consequência o repensar da escola enquanto instituição, encarando-a não mais como um espaço-tempo de transmissão de saberes, que se escutavam passivamente, para depois se reproduzirem o mais fielmente possível, mas como um espaço-tempo de diálogo(s) (entre)cruzado(s), em que os diversos parceiros sociais, com vivências e competências próprias, se apropriavam dos conhecimentos e desenvolviam as suas competências (César, 2001). Questionou-se o que era aprender, bem como o que era ensinar, qual o papel dos professores e alunos numa Escola que já não era vista como um aglomerado de pessoas agindo de forma mais ou menos isolada, mas antes como uma comunidade educativa, interagindo dialogicamente. Esta nova concepção de Escola fez surgir a urgência de implementar, não só nas salas de aula, mas em todo o espaço-tempo escolar, práticas quotidianas que permitam desenvolver nos alunos essas mesmas competências, evitando desistências e abandonos que têm preços altíssimos no futuro. (César, 2002, p. 118)

Como salientavam Armstrong, Armstrong e Barton (2000), assumindo uma posição inequívoca a favor do respeito e da valorização da diversidade e pela "celebração da diferença", é preciso ultrapassar noções como a de defeito, deficiência ou anormalidade, algo que César (2012b) também realça, sublinhando que é essencial que, as próprias designações das diferentes condições (ex: cego, em vez de deficiente visual; surdo, em vez de deficiente auditivo) comecem, desde logo, por o assumir. Nesse sentido, esta autora refere que, tal como se considera o espectro do autismo, se deveria falar de espectro da mobilidade, em vez de deficientes motores, pois quando usamos a palavra deficiente, já estamos a não ser inclusivos e, implicitamente, a comparar aquela pessoa com o que se considera ser a normalidade. Celebrar a diversidade e a diferença não é compatível com terminologia que recorre à palavra deficiente para descrever alguém. Para esta autora, tal como para Armstrong e seus colaboradores (2000),

> A educação inclusiva é um anúncio inequívoco, uma declaração pública e política e uma celebração da diferença. A diferença não é um eufemismo para defeito, anormalidade, para um problema que deve ser trabalhado através de políticas educativas de índole tecnicista e assimilacionista. A diversidade é um facto social. (Armstrong et al., 2000, p. 134)

Aceitar a diferença significa não estigmatizar quem não é como os outros, aceitar que cada pessoa tem as suas especificidades, que todos somos seres únicos e irrepetíveis. Mittler (2000) enfatiza que é essencial, para promovermos uma educação inclusiva, que cada agente da comunidade educativa (alunos, pais e familiares, professores, auxiliares de acção educativa, entre outros) internalize uma nova noção de diferença, em que esta seja vista como uma riqueza e não como algo a evitar ou problemático. Sendo a diversidade aquilo que caracteriza cada pessoa, não aceitar e celebrar a diferença, corresponde a não aceitar os outros, com todos os riscos que isso encerra. Freire (1996) considerava que qualquer prática educativa deveria ser "um acto de grande amor pelo mundo e pelo homem" (p. 12), ou seja, de um profundo respeito e admiração pelo outro, pela sua individualidade e características pessoais. Por isso mesmo, cada professor precisa de estar "vigilante contra todas as práticas de desumanização" (Freire, 1996, p. 12). Para César (2024b) e César e Machado (2024a, 2024b, 2025), isso inclui respeitar as diversas abordagens dos problemas, tipos de raciocínio matemático e estratégias de resolução, mas também a diversidade cultural, em geral, as formas de argumentação, a criatividade e imaginação de cada pessoa, bem como os diferentes caminhos que cada um segue para aprender.

A inclusão é o oposto da exclusão e aqueles que vivenciaram formas prolongadas de profunda exclusão relatam o sofrimento e frustração que lhes estão associados, bem como as cicatrizes que deixam, em termos de auto-estima e de acreditarem nas suas capacidades e competências, como ilustram César (2002, 2003, 2009, 2013a, 2013b, 2014, 2017, 2024b), César e seus colaboradores (2014), ou César e Machado (2025). Anteriormente, referindo-se a outros países e contextos, também Billington (2000) e Pomeroy (2000) tinham descrito como se sentiam crianças e adolescentes que eram excluídos, cujas vivências escolares e sociais os faziam sentir que não tinham lugar, que não pertenciam ali, pois não

eram aceites pelos professores, pares, familiares e vizinhos. Algo também relatado e analisado por César (1998a), referindo-se a questões relacionadas com a indisciplina, ou por Strecht (2008), referindo-se a jovens adolescentes em risco, que sentiam que aquela Escola não era a sua, pois não eram aceites, apenas eram criticados e punidos, sem serem escutados e valorizados. Depois de vários anos a serem excluídos, muitas vezes manifestavam formas de agir e reagir mais agressivas, maneiras desajustadas de lutarem contra uma rejeição que não desejavam. Instalava-se, assim, um círculo vicioso: as punições, na escola, criavam mais sentimentos de rejeição; e esta sensação de exclusão originava mais formas de actuação disruptivas. Algo que César e seus colaboradores (2014) também descrevem, quando analisam o percurso de um aluno com necessidade de AESE, assim como César (2009, 2013a, 2013b), referindo-se a um aluno de uma cultura socialmente desvalorizada e cujas capacidades e competências matemáticas não eram reconhecidas pelos professores, nem pelos colegas.

O conceito de educação inclusiva é polissémico, pelo que é importante clarificar a conceptualização que assumimos. Ainscow e César (2006), analisando a literatura da especialidade, identificaram os cinco principais significados atribuídos a este conceito: (1) inclusão como preocupação com a deficiência e as 'necessidades educativas especiais'; (2) inclusão como resposta a exclusões disciplinares; (3) inclusão como respeitante a todos os grupos vulneráveis à exclusão; (4) inclusão como promoção da escola para todos; e (5) inclusão enquanto educação para todos. Assumimos uma conjugação dos dois significados mais abrangentes: o três e o cinco. Ao considerarmos todos os grupos vulneráveis à exclusão, vamos para além dos alunos em condição de AESE (César et al., 2014), incluindo também a discriminação de minorias culturais, ou de género. Se pensarmos na discriminação de género, como há mais mulheres do que homens na população portuguesa e mundial, é a discriminação de uma maioria. Daí pormos a tónica na desvalorização social e não no ser uma minoria. A discriminação de género ilumina como as questões de poder são preponderantes na discriminação e na exclusão. Apesar de maioria, as pessoas podem sentir que são silenciadas, que não têm voz, que têm pouco poder, que não são respeitadas. Por isso mesmo, a inclusão só é possível se houver distribuição de poder, se utilizarmos mecanismos de *inter-empowerment* (César, 2009, 2013b, 2017, 2024a, 2024b; César &

Machado, 2024a, 2024b, 2025), contribuindo para o empoderamento de quem não tem voz e age como participante periférico, em vez de participante legítimo (César, 2009; Lave & Wenger, 1991).

Ao assumirmos a noção de "educação para todos" e não de "escola para todos", somos mais abrangentes, considerando a educação formal, não-formal e informal. Apesar da maioria dos estudos do projecto IC serem em contexto escolar e em cenários de sala de aula, ou seja, na educação formal, a relevância dada à educação não-formal e informal está patente nas dinâmicas regulatórias de participação Escola/Família que foram desenvolvidas (César, 2013b; César et al., 2014), sobretudo quando estas eram conceptualizadas como mediação cultural bi-unívoca (César, 2017; César & Machado, 2024a, 2024b, 2025). Nas escolas onde existiam minorias sócio-culturalmente desvalorizadas, era particularmente importante recorrer a dinâmicas regulatórias de participação que facilitassem o diálogo intercultural entre aquela escola e aquelas famílias. Como salientam Wegerif, Mercer e Major (2019), o diálogo pode ser conceptualizado de três maneiras diferentes: (1) no senso comum, significa conversação; (2) pode referir-se à construção de conhecimento através da interacção social, ou seja, da participação num diálogo; e (3) enquanto experiência de comunicação verbal, ou não-verbal, pode ser concebido num sentido ontológico enquanto fundador da identidade e do conhecimento, numa relação entre si e o outro, mesmo que esta terceira pessoa não esteja presente na interacção, como salientava Marková (2016). Neste livro, quando concebemos o *self* como dialógico, assumimos este último significado.

Esta mediação cultural podia ser concebida pela cultura dominante, sem trabalharem colaborativa e dialogicamente com representantes das minorias culturais, ou seja, aqueles que se sentiam e eram excluídos. Chamamos-lhe mediação cultural unívoca, pois vai apenas num sentido: da cultura dominante para a(s) cultura(s) minoritária(s). Em termos de poder, é decidida por quem tem mais poder, sem que este seja distribuído. Isto explica porque há tantas medidas bem-intencionadas que falham: ao não serem escutadas, respeitadas e valorizadas, ao não existir partilha das decisões, as pessoas a quem as medidas se destinam, tendem a não lhes aderir. Quando a mediação cultural é bi-unívoca (César, 2017), ela vai nos dois sentidos: da dominante para a(s) minoria(s) e vice-versa. Há uma comissão, que inclui as diversas culturas, que trabalha em conjunto, de forma

colaborativa e dialógica, partilhando o poder, as responsabilidades, as decisões e as práticas. Ainda antes desta distinção conceptual estar elaborada, César (2013b) descreve detalhadamente uma escola onde isso acontece. Também César e seus colaboradores (2014) identificam e discutem as dinâmicas regulatórias de participação Escola/Família usadas noutra escola. Mais tarde, quando realiza a meta-análise de todo o *corpus* empírico recolhido no projecto IC, César (2017) conceptualiza a distinção entre estas duas formas de mediação cultural e passa a distinguir entre mediação cultural unívoca e mediação cultural bi-unívoca.

Como já afirmámos, a inclusão é o oposto da exclusão. Num programa da televisão francesa (Dumas, 2009), o escritor Jean-Marie Rouart, ao explicar o seu percurso escolar, afirmou: "O sucesso é um mistério. O insucesso é um mistério. De que lado estamos? Sempre pensei que seria daqueles que falhavam" (transcrito do vídeo, sem página). Porém, apesar de ser considerado um aluno com insucesso académico em línguas e de ter tido muita dificuldade em terminar o ensino secundário, tornou-se um escritor famoso, eleito para a Academia Francesa, a 18 de Dezembro de 1997, a mais alta distinção para um escritor francês. Na escola, nada fazia prever um futuro tão auspicioso. Os professores consideravam o seu desempenho "fraco" e nenhum deles acreditaria que ele poderia tornar-se escritor. No seu caso, o insucesso escolar não bloqueou a trajectória de participação ao longo da vida, ou seja, não o fez desistir de escrever, de se tornar escritor. Mas, quando uma determinada escola e os professores que nela leccionam se mostram incapazes de reconhecer as capacidades e competências dos alunos, muitas vezes isso provoca danos consideráveis no desenvolvimento e tem consequências negativas, em relação ao futuro. César (2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b) e César e Machado (2024a) discutem o caso do V., que retomamos neste livro. Tratava-se de um aluno em acentuado insucesso académico em Matemática (Nível 1, o mais baixo) e que pensava abandonar a Escola, assim que concluísse o 9.º ano de escolaridade. Mostram como, sem uma educação intercultural e inclusiva, sem que as potencialidades, capacidades e competências deste aluno fossem reconhecidas e valorizadas pelos professores, o seu futuro teria sido muito diferente e, provavelmente, mais problemático. Assim, um dos maiores contributos para a inclusão é conseguir identificar as capacidades e competências dos alunos, as que eles já conseguem mobilizar, bem como as

potencialidades, que importa desenvolver (César, 2009, 2024b; Machado, 2014; Vygotsky, 1932/1978, 1985). Isto significa conceber as capacidades e competências segundo uma perspectiva desenvolvimentista, que considera que novas capacidades e competências podem ser actualizadas, a partir das várias vivências e interacções sociais (Wertsch, 1985), nomeadamente das práticas, em aula (César, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b; Lau, Singh, & Hwa, 2009; Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1985, 1997).

Säljö e Mäkitalo (2022), analisando os desafios, para o desenvolvimento e a aprendizagem, de um mundo com uma forte componente digital, como o do século XXI, realçam como os contributos de Piaget e de Vygotsky, associados a uma perspectiva sócio-cultural e histórica, podem ajudar a compreender o papel das ferramentas culturais no desenvolvimento e na aprendizagem. Salientam que as ferramentas culturais são simultaneamente físicas e intelectuais/conceptuais, mediando as actividades realizadas, em diferentes contextos. Para César (2024b), César e seus colaboradores (2014) e César e Machado (2024a, 2024b), respeitar as formas de fazer e aprender Matemática corresponde a considerar a aprendizagem situada e mediada por ferramentas culturais, nomeadamente pela L1. Fazer e aprender Matemática são práticas situadas e os desempenhos matemáticos dos alunos estão embebidos das culturas em que estes participam e dos sistemas simbólicos a que têm acesso. Por isso, não respeitar as formas preferenciais de abordar os problemas, os diferentes tipos de raciocínio matemático e as várias estratégias de resolução constitui uma maneira de excluir alguns alunos das práticas que caracterizam uma sala de aula, nomeadamente de Matemática. Para a educação ser intercultural e inclusiva, é necessário assumir um diálogo intercultural que as valorize e respeite.

A educação inclusiva tem de ser também intercultural, para evitar que algumas etnias sejam excluídas. Mas, como as formas de exclusão podem ser muito subtis, é preciso estar atento, para as evitar. A meta-análise realizada no projecto IC mostrou que a L1 influencia a forma como os alunos abordam os problemas de Matemática, o tipo de raciocínio e as estratégias de resolução que preferem (César, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b). Uma língua ideográfica, como o crioulo de Cabo Verde, não tem plural nem singular, masculino ou feminino, os verbos não têm terminações diferentes, de acordo com os sujeitos e tempos

verbais, e as palavras podem assumir significados diferentes consoante a posição que ocupam na frase. Durante muitos anos, era uma língua de tradição oral, sem suporte escrito. Como afirmava João dos Santos (1990), "pensar é uma forma de falar" (p. 44), algo que, anos mais tarde, Sfard (2008) reforçou, quando considerou que pensar é uma forma de comunicar. Por isso, quem fala uma língua com características diferentes, pensa de forma diferente. Os alunos que têm como L1 o crioulo, preferem abordagens globais dos problemas, raciocínios espaciais ou geométricos e estratégias de resolução baseadas em representações gráficas (ex: desenhos, esquemas, gráficos, entre outras). Porém, estas não são as mais valorizadas em aula, nem nos manuais escolares. São frequentemente desaconselhadas, ou mesmo proibidas. Por isso, estes alunos não se sentem respeitados, uma vez que não podem partir das suas formas naturais de raciocínio e resolução das tarefas para, depois, aprenderem outras (César, 2009, 2013a, 2024a, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b). Os alunos – e a maioria dos professores – que têm como L1 uma língua fonética, como o português, preferem abordagens dos problemas passo-a-passo, raciocínios analíticos e estratégias de resolução aritméticas e algébricas, complementadas com composições matemáticas (César, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b). Estas são também as mais utilizadas nos manuais escolares e mais valorizadas pelos professores, sendo frequentemente as mais cotadas, nas provas de avaliação mais formais, como os testes individuais e as provas nacionais (vulgo, exames). As línguas fonéticas têm plural e singular, masculino e feminino, conjugações verbais com terminações diferentes em função do sujeito e do tempo verbal. Têm uma sintaxe complexa, com uma forte tradição escrita. Por isso mesmo, favorecem os raciocínios analíticos e as estratégias de resolução aritméticas, algébricas ou as composições matemáticas.

Aceitar, em aula, apenas as abordagens, raciocínios e estratégias de resolução que são mais confortáveis para os professores e alunos cuja língua materna (L1) é a língua portuguesa, é uma forma subtil de exclusão daqueles cuja L1 é uma língua ideográfica, como os que participam na cultura de Cabo Verde, ou na cultura cigana. É usar o poder da cultura maioritária e dominante de uma forma muito subtil pois, muitas vezes, aqueles que estão a ser excluídos, nem reconhecem que estão a ser impedidos de usar as suas formas naturais de pensar. Porém,

como mostram os exemplos analisados, anos e anos deste tipo de rejeição tem impactes profundos no (in)sucesso escolar destes alunos, levando muitos deles a abandonarem a Escola e, sobretudo, a duvidarem das suas capacidades e competências. Assim, é frequente culparem-se a si próprios, quando foram excluídos por quem detém o poder decisor, por quem decide, por exemplo, o que é considerado conhecimento legítimo (Abreu, Bishop, & Pompeu, 1997; Apple, 1995), os critérios de avaliação, ou os valores com os quais contactam quando discutimos Matemática, em aula (Bishop, 2001).

Beccuti e Robutti (2022) também discutem o papel do poder, nomeadamente de organizações poderosas e influentes, como a Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Económico (OCDE), no que se refere ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Analisam e discutem o papel destas organizações no que se refere a questões como a cidadania, a democracia, a estandardização e a inclusão. Maass, Sorge, Hesse, Romero-Ariza e Straser (2021) abordam maneiras de promover uma cidadania activa nas aulas de Matemática e de Ciências. Desenvolveram um projecto de investigação que designam por MaSdiV (*Supporting Mathematics and Science teachers in addressing diversity and promoting fundamental values*), no qual pretendem estabelecer conexões entre a Matemática e as Ciências e a cidadania. Conceberam e puseram em prática um curso para professores (N=311), de seis países europeus, baseado na modelação, recorrendo a problemas reais, relevantes para a sociedade actual, como as questões climáticas, a segurança da comida, a crise Covid, a crescente migração ou a justiça social. Este programa discutia e clarificava os valores dos professores e o modo como os valores podem ser desenvolvidos, em aula. Os resultados revelam a satisfação dos professores em relação ao curso e as mudanças, nas práticas, a partir das reflexões, discussões e aprendizagens que realizaram. Estas mudanças tiveram impactes nos alunos, em aula. A equipa que participou neste projecto, também desenvolveu trabalhos sobre aprendizagem da Matemática e cidadania (Maass, Doorman, Jonker, & Wijers, 2019).

Yeager, Green e Castanheira (2009), referindo-se a uma comunidade social que inclui pessoas cuja L1 é o inglês e outras em que é o espanhol, realçam a importância de uma escola que aceite uma educação bilingue, bem como as diversas formas de fazer e aprender Matemática, próprias de cada comunidade,

nomeadamente no que se refere à maneira de realizar cálculos. Esta é uma questão muito relevante, mas diferente da que abordam César (2024b) e César e Machado (2024a, 2024b). No entanto, os sentimentos de rejeição, os desempenhos matemáticos abaixo das suas possibilidades, ou as baixas expectativas dos professores em relação a estes alunos, são bastante semelhantes às que relatam Yeager e seus colaboradores (2009). Quando, para além de impor a língua de instrução, a cultura dominante também impõe formas de abordar os problemas, raciocinar e estratégias de resolução aceites e valorizadas, estamos perante formas de exclusão que prejudicam fortemente os alunos que delas são alvo (César, 2003, 2009, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b). Por isso mesmo, como afirma Bishop (2001), quando se ensina Matemática, também estamos, implícita ou explicitamente, a ensinar valores. Há valores implícitos nas atitudes de aceitação ou rejeição da diferença, na maneira como se discutem diversas estratégias de resolução, nos exemplos de que os professores se servem para ilustrar um determinado conceito e nos temas abordados em aula, a partir das tarefas propostas. Por isso, João dos Santos afirmava: "Aprendi, primeiro como criança que sente, depois, como adulto que vê que os maus resultados nos estudos se têm nas disciplinas dos professores que não gostam de nós, ou nas daqueles de quem nós não gostamos" (dos Santos, 1991b, p. 266). Qualquer professor, pelas atitudes que assume, pela aceitação ou rejeição dos alunos, exprime valores que têm subjacentes sentimentos, que configuram os desempenhos e as aprendizagens, assim como o desenvolvimento emocional, moral, social e cognitivo. Cada professor é um modelo, pela forma como actua, em aula e fora dela. Isso levava João dos Santos a afirmar que "tudo quanto diz respeito à vida, não se ensina, aprende-se, e aprende-se com os modelos das pessoas, e com o modelo social que ao indivíduo se oferece" (dos Santos, 1991b, p. 167).

É importante clarificar, como salientou César (2014), que o conceito de cultura é utilizado em dois sentidos diferentes: (1) cultura em sentido lato (ex: cultura cabo-verdiana, cultura cigana); e (2) cultura em sentido restrito (ex: cultura de escola, cultura de sala de aula). Neste livro, quando escrevemos apenas a palavra cultura, referimo-nos a uma cultura em sentido lato e, quando usarmos cultura em sentido restrito, especificamos se falamos da cultura de escola (César, 2013b), ou da cultura de sala de aula (Cobb & Bauersfeld, 2012).

Quando consideramos a cultura no sentido lato, como salientava Nieto (1996, 2018), esta caracteriza-se por uma língua, partilhada entre os membros que nela participam. Esta língua serve para pensar, sonhar, contar, mas também para comunicarem uns com os outros.

Se as famílias destas pessoas partilham a mesma cultura, esta é, geralmente, a língua materna (L1), aquela que falam desde bebés, em que comunicam mais facilmente sentimentos, em que sonham, contam, mesmo quando estão no estrangeiro, em que cantam e pensam. Por isso mesmo, se a comunidade cultural é forte e unida, mesmo vivendo num outro país, com outra língua oficial, as pessoas tendem, em casa, nos bairros, nas lojas, ou nas associações culturais, a falar a língua da cultura de origem que, para eles, é a L1. Algumas pessoas, que já nascem nos países para onde emigraram os pais ou avós, são bilingues. Falam a língua materna (L1), da sua cultura de origem e, simultaneamente ou bastante cedo, também aprendem a língua oficial do país onde residem, como acontecia com muitos emigrantes portugueses em França ou na Alemanha. Noutras culturas em sentido lato, como acontecia com a comunidade cabo-verdiana que César (2003, 2009, 2013a, 2013b, 2017, 2024a, 2024b) e César e Machado (2024a, 2024b) analisam, muitas das pessoas falavam crioulo de Cabo Verde e apenas conheciam algumas palavras em português. Nesta comunidade, a pregnância da L1 era muito maior e configurava, por exemplo, de forma muito nítida, a maneira de fazer e aprender Matemática.

Ainda segundo Nieto (1996, 2018), as pessoas que participam numa cultura em sentido lato partilham, para além da língua, uma História comum, uma localização geográfica, um sistema de valores, ritos (ex: de casamento, funerários, entre outros), tradições, formas de vestir e cozinhar, determinados tipos de música, dança e outras manifestações artísticas, bem como uma religião. Assim, participar numa cultura, em sentido lato, vem acompanhado por um sentimento de pertença a um determinado grupo cultural, que se manifesta de muitas maneiras diferentes. Se pensarmos, mais uma vez, nos emigrantes portugueses, estes fundavam, frequentemente, associações culturais onde se comia comida portuguesa, existiam grupos folclóricos de algumas regiões de Portugal, se cantava fado e outras músicas portuguesas, ou seja, estas associações culturais ajudavam a manter o sentimento de pertença à cultura portuguesa. Se observarmos o que

acontecia na comunidade cabo-verdiana descrita por César (2009, 2013a, 2013b, 2017, 2024a, 2024b) e por César e Machado (2024a, 2024b), a maneira de vestir, a comida, as festas, que incluíam música e dança, as tradições e a maneira de viver, estavam fortemente impregnadas da cultura cabo-verdiana e a L1 era o crioulo de Cabo Verde.

Mas, a maior parte destas pessoas, também participavam na cultura do país para onde tinham emigrado, sobretudo no caso dos emigrantes portugueses. Falavam a sua língua, festejavam datas relevantes, comiam a sua comida, aprendiam músicas e danças típicas do novo país onde viviam, ou seja, participavam em duas, ou mais, culturas, em sentido lato. Por vezes, o sentimento de pertença a cada uma delas era tão forte que, quando os emigrantes portugueses estavam de férias, em Portugal, sentiam a falta de elementos característicos da cultura francesa ou alemã, enquanto quando estavam no país para onde tinham emigrado, as sentiam em relação à cultura portuguesa. Este fenómeno não era visível na comunidade cabo-verdiana, descrita por César (2009, 2013a, 2013b, 2017) ou César e Machado (2024a, 2024b). Demasiado pobres para conseguirem viajar, pois ir a Cabo Verde implica comprar um bilhete de avião, muitos deles não tinham voltado a Cabo Verde e, os que já tinham nascido em Portugal, nunca lá tinham ido. Por isso, o sentimento de pertença àquela cultura era passado através da tradição oral, das histórias que ouviam contar, da música que tocavam, cantavam e dançavam, bem como das vivências quotidianas, como a comida, a maneira de vestir, de se pentear ou de interagirem uns com os outros, de viverem a vida. Estes eram os critérios positivos que os faziam sentir que participavam na cultura de Cabo Verde, aqueles de que falavam com orgulho. Mas havia também os critérios negativos que vivenciavam quotidianamente, como as dificuldades que sentiam, nomeadamente o racismo, a falta de oportunidades de empregos estáveis e com melhores salários, as baixas expectativas por parte das escolas, ou a dificuldade em alugar uma casa, mesmo quando tinham possibilidades de a pagar. Estas vivências, impregnadas de discriminação negativa, fazia-os sentirem-se excluídos e não lhes permitiam esquecerem-se de que participavam naquela cultura e que eram diferentes da cultura maioritária e dominante. Estes critérios negativos eram relatados com frustração, raiva, desconsolo, sentimentos de injustiça e impotência, por vezes, mesmo com desespero, porque mesmo

estudando, tendo um emprego estável, continuavam a ser confrontados com estas barreiras, no quotidiano.

No sentido restrito, o que caracteriza uma cultura, não é a língua. Por exemplo, em Portugal, cada escola pública tem uma determinada cultura de escola. Mas a língua de instrução, em todas as escolas públicas, é a mesma: o português. Portanto, não é a língua que diferencia as várias culturas de escola que existem neste país. Cada cultura de escola tem subjacente um meta-contrato didáctico (Schubauer-Leoni, 1986) distinto, ou seja, tem um sistema de regras de funcionamento, que lhe é próprio. Uma parte destas regras estão explícitas, por exemplo, no Projecto Educativo de Escola, podendo mesmo constar do *site* daquela escola. Porém, outra parte destas regras são do conhecimento de todos, mas são implícitas. Como são partilhadas com a cultura, em sentido lato, que existe naquele país ou comunidade cultural, não precisam de ser explicitadas para serem conhecidas. Contudo, como refere César (2009, 2013a), o desconhecimento das regras de conduta de uma determinada cultura, em sentido lato, pode levar a diversos equívocos, como sucedeu naquela escola em que, algumas formas de agir, por parte de quem participava na cultura de Cabo Verde e na de Portugal, necessitaram de ser explicitadas, para não serem mal interpretadas. Esta autora cita o exemplo de olhar directamente nos olhos de um adulto que está a ralhar connosco que, na cultura portuguesa, é visto como estar interessado no que está a ser dito e respeitar aquela pessoa, enquanto, na cultura cabo-verdiana, olhar um adulto mais velho e com autoridade, directamente nos olhos, é sinal de desafio dessa mesma autoridade e falta de respeito. Neste exemplo, explicitar os princípios existentes em cada cultura foi essencial, para evitar equívocos e castigos injustos.

César (2013b) e César e seus colaboradores (2014) caracterizam a cultura de escola existente em duas escolas distintas, na região da Grande Lisboa e, apesar da língua de instrução ser a mesma, percebemos como estas duas culturas de escola são diferentes, cada uma delas enfrentando desafios próprios e, por isso mesmo, necessitando de diferentes dinâmicas regulatórias de participação Escola/Família, mesmo tendo ambas recorrido à mediação cultural bi-unívoca (César, 2017; César & Machado, 2024a, 2025). Assim, diferentes culturas de escola dão origem – e precisam – de diferentes medidas de mediação cultural bi-unívoca, o que reforça a necessidade de trabalho colaborativo e dialógico entre os

diversos participantes daquela comunidade educativa, para que as decisões sejam partilhadas e, assim, mais facilmente adequadas e aceites por todos. Os exemplos das medidas implementadas em cada uma das escolas mostra como é necessária sensibilidade e flexibilidade, por parte da Direcção da escola e dos professores, que mais frequentemente iniciam este processo. Como o poder está, inicialmente, do seu lado, são eles quem o pode distribuir. Assim, mesmo quando as primeiras dinâmicas regulatórias de participação Escola/Família são ainda implementadas através de uma mediação cultural unívoca, porque são propostas pela Direcção e/ou grupo de professores, têm de ser adequadas às necessidades e ter impactes positivos na comunidade educativa e na cultura de escola, para mais rapidamente se conseguir evoluir para uma mediação cultural bi-unívoca.

Cobb e Bauersfeld (2012) definem diversas culturas de sala de aula (*classroom culture*) e, neste tipo de cultura, em sentido restrito, também não é a língua que caracteriza cada cultura, uma vez que a língua de instrução era, em todas elas, o inglês. É importante realçar que, numa determinada escola, ou turma, existem alunos de diferentes culturas, em sentido lato, que partilham tempos e espaços educacionais. Portanto, numa mesma escola, temos alunos com maneiras de vestir, hábitos alimentares, tradições, ritos e manifestações artísticas diferentes, bem como com L1 diversas. Logo, o que caracteriza as culturas, em sentido restrito, é diferente daquilo que caracteriza as culturas, em sentido lato.

Em sentido restrito, por exemplo, quando pensamos numa cultura de escola, o que a caracteriza é aquilo que é partilhado pelos diversos agentes educativos: professores, alunos, famílias e outros agentes educativos daquela escola. A cultura de escola define-se pelos princípios educativos, códigos (implícitos e explícitos), regras de funcionamento, expressas num meta-contrato didáctico (Schubauer-Leoni, 1986), padrões de compreensão do que se passa naquele contexto, maneiras de agir e reagir, que caracterizam aquela escola. É a partilha desses pontos comuns que podem fazer com que um aluno sinta que é um participante legítimo (César, 2013b), que tem poder e é aceite naquela escola. É a identificação com os critérios que a caracterizam que faz com que esse aluno não se sinta rejeitado, sem voz e a ser tratado como um participante periférico (Lave & Wenger, 1991), ou seja, como alguém que não corresponde ao que aquela cultura de escola veicula.

Pelo que foi dito, mesmo numa freguesia pequena, se existirem várias escolas, cada uma delas terá uma cultura de escola própria e os pais ou encarregados de educação, se tivessem a liberdade de poder escolher a escola pública que os filhos frequentam, o que não acontece em Portugal, seriam fortemente influenciados pela cultura daquela escola corresponder aos princípios educativos que desejam para os filhos. Quando podem escolher, ou seja, quando inscrevem os filhos numa escola privada, a cultura de escola é um dos elementos que têm em consideração, mesmo que não saibam que este conceito existe. Mas, nessa escolha, analisam os princípios educativos, falam com outros pais que tenham filhos na mesma escola para saberem mais detalhes da cultura de escola, lêem comentários nas redes sociais, informam-se sobre as regras de funcionamento, ou seja, sobre o meta-contrato didáctico (Schubauer-Leoni, 1986).

Se pensarmos no outro exemplo de cultura em sentido restrito, a cultura de sala de aula (Cobb & Bauersfeld, 2012), esta caracteriza-se também por princípios educativos e regras de funcionamento, que se operacionalizam através do contrato didáctico (Brousseau, 1988; Schubauer-Leoni, 1986), ou seja, de um conjunto de regras de funcionamento implícitas, ou explícitas, que regem aquela aula. Assim, numa determinada cultura de aula será permitido os alunos resolverem tarefas em conjunto, como acontece no trabalho em díade ou em pequenos grupos (César, 2009, 2013b), enquanto noutras isso não será autorizado. Numas, os alunos podem levantar-se, sem perturbar, mas também sem pedirem explicitamente autorização, para irem afiar um lápis (Abrantes, 1994; Courela & César, 2012, 2014), enquanto noutras terá de ser o professor, a autorizar, de forma explícita, essa movimentação. Numas culturas de sala de aula podem emprestar-se materiais escolares (Abrantes, 1994; César, 2009, 2013a; Courela & César, 2004, 2008), noutras não. Em algumas os alunos podem questionar o professor (César, 2013b, 2017; César et al., 2014), enquanto noutras, apenas o professor pode fazer perguntas aos alunos. Numas culturas de sala de aula pode estar-se de boné, noutras não. Portanto, as culturas de sala de aula, numa mesma escola e turma, mudam em função do estilo de aula que o professor pretende implementar e de os alunos aderirem, mais ou menos, ao contrato didáctico que lhes é proposto, sendo depois negociado ou imposto, consoante o estilo pedagógico de cada professor.

Os professores que distribuem o poder propõem algumas regras do contrato didáctico, no início do ano lectivo. Mas, depois, esse mesmo contrato didáctico vai ser negociado com os alunos, como descrevem César (2009, 2013a, 2013b), César e seus colaboradores (2014), ou Courela e César (2004, 2008, 2014). Se o professor quer concentrar em si todo, ou quase todo, o poder, as regras do contrato didáctico são impostas por ele, não existindo margem para as negociar com os alunos. Nesse caso, se os alunos não cumprem as regras impostas pelos professores, geralmente são alvo de sanções (ex: reprimenda oral, ser convidado a sair da sala, ter falta, ter uma participação escrita, que pode levar a uma suspensão). Como as posições assumidas pelos professores fazem parte de um *continuum*, as possibilidades de maior, ou menor, negociação, são imensas. Daí a enorme variabilidade das culturas de sala de aula (Cobb & Bauersfeld, 2012), mesmo quando estas fazem parte de uma mesma escola e de um mesmo sistema de ensino bastante centralizado, como em Portugal, ou seja, onde as escolas não têm autonomia suficiente para implementarem currículos e práticas muito diferenciados como acontece noutros países, como a Suíça ou a Finlândia.

Leite (2006) realça a relevância de as escolas serem capazes de tomar decisões curriculares, enfatizando a necessidade de os professores se assumirem como decisores do currículo e não como meros executantes, tal como reafirmaram recentemente Leite e Sousa-Pereira (2023). Para que isso aconteça, é preciso que as escolas tenham autonomia, mas também é necessário que os diversos agentes educativos queiram assumir a tomada de decisões.

> como é evidente, para que as escolas sejam lugares de decisão curricular, é necessário que sejam reconhecidas como espaços de autonomia pedagógica e de gestão do currículo, mas também é necessário que os professores/educadores queiram e saibam assumir profissionalmente essa autonomia. (Leite, 2006, pp. 74-75)

O que acima foi dito relaciona-se com um conceito cunhado por Leite (2003): escola curricularmente inteligente. Numa instituição deste tipo, a gestão do currículo é também assumida pela própria escola, existindo decisões que são tomadas pelos diversos agentes educativos, de forma colectiva. Nestas escolas

promove-se a comunicação entre alunos e professores. Leite (2003) define "escolas curricularmente inteligentes":

> Uma instituição que não depende exclusivamente de uma gestão que lhe é exterior, porque nela ocorrem processos de tomada de decisão participados pelo colectivo escolar e onde, simultaneamente, ocorrem processos de comunicação real que envolvem professores e alunos e, através deles, a comunidade na estruturação do ensino e na construção da aprendizagem. (Leite, 2003, p. 125)

Neste sentido, as escolas que utilizam dinâmicas regulatórias de participação Escola/Família (César, 2013b; César et al., 2014) ou as que recorrem à mediação cultural bi-unívoca (César, 2017, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b, 2025) são o que Leite (2003, 2006) designa por "escolas curricularmente inteligentes". Estas escolas descritas por César (2013b, 2017), César e seus colaboradores (2014) e César e Machado (2024a, 2024b, 2025) vão ainda mais longe do que o que defendia Leite (2003, 2006): (1) partilham responsabilidades, tomada de decisão e operacionalização das práticas; e (2) para além dos professores e alunos, envolvem também outros agentes educativos, como os auxiliares de acção educativa e as famílias, bem como a comunidade social envolvente.

Um outro conceito cunhado por Leite (2003) é o de "amigo crítico", papel que pode ser desempenhado por supervisores ou investigadores externos, que discutam criticamente com agentes educativos, aprofundando uma reflexão sobre as práticas que é mais difícil fazer de forma isolada, sem contacto com outras pessoas, exteriores àquela escola.

> A experiência tem-me demonstrado o peso que as rotinas geram e o desestímulo que por vezes reina junto de colegas, professores, que nem sempre conseguem captar o entusiasmo dos alunos ou que, apesar de investirem fortemente no bom exercício profissional, não emergem do anonimato para que a todos empurra a escola de massas. É na intenção de permitir a existência de apoios à inovação, de ampliar as representações que por vezes se tem dos projectos quando para eles se parte, mas também de exercer algum efeito clínico que impeça situações de desentusiasmo, que tem sido proposto o recurso a assessorias externas que, funcionando na lógica do um "amigo crítico" (Leite, 2002, 2003), se envolve

> com a escola e os seus agentes na reflexão sobre as situações, trazendo "apports" para que esses agentes tomem as suas próprias decisões. No entanto, olhando as políticas que têm sido tomadas para a educação em Portugal, uma vez mais fico com a sensação de quão distante está este discurso das possibilidades da sua concretização. (Leite, 2006, pp. 76-77, aspas no original)

Este conceito é um contributo significativo para que a cultura de escola seja mais dinâmica, interventiva, baseada em trabalho colaborativo e dialógico, na reflexão e na discussão crítica das práticas. Nesse sentido, apesar do desalento da frase final, pode ser uma maneira de contribuir para uma educação intercultural e inclusiva.

Na língua inglesa, as culturas em sentido lato escrevem-se com maiúscula (ex: *Portuguese culture*), o que levou diversos autores a escrever *Deaf* (Surdos) também com maiúscula, como forma de sinalização, através da grafia, de que consideravam existir uma cultura surda, em sentido lato (Borges, 2009, 2017; Borges & César, 2011, 2012; Borges, César, & Matos, 2012, 2014; Melro & César, 2010, 2012, 2014), com uma língua própria, a língua gestual portuguesa (LGP), em Portugal, que, tal como as restantes línguas orais, tem variações de país para país. Porém, na língua portuguesa, cultura cigana ou cultura inglesa, escreve-se com minúscula. Portanto, a existência, ou não, de maiúscula, não serve para identificarmos se falamos de cultura no sentido lato ou no sentido restrito. Apenas uma escrita cuidada e rigorosa, bem como a clarificação conceptual, o podem fazer.

Para muitos autores a cultura surda é uma cultura em sentido lato (Borges, 2009, 2017; Borges & César, 2011; Borges et al., 2014; Melro & César, 2012, 2014), algo com o qual concordamos e que assumimos. Se escrevemos surdo, com minúscula, é porque, como explicitámos anteriormente, na língua portuguesa não se escreve nenhuma cultura com maiúscula. Assim, esta grafia é também uma questão de inclusão de todo e qualquer aluno, seja qual for a sua cultura: se escrevermos Surdo e, depois cego, cigano ou cabo-verdiano, pode dar a sensação de que estamos a valorizar mais umas culturas, em sentido lato, do que outras, ou que achamos as culturas em sentido lato mais importantes do que as culturas em sentido restrito, o que não consideramos legítimo. Assim, assumimos

que a cultura surda, em sentido lato, existe, mas mantivemos a escrita com minúsculas.

Considerar a cultura surda uma cultura em sentido lato deve-se, essencialmente, a esta ter uma língua (LGP, em Portugal), com uma sintaxe própria, vocabulário e expressividade específicos, quando comunicam, como acontece com qualquer outra língua. Assumimos, também, que a LGP (em Portugal) e outras línguas gestuais, noutros países, devem ser a L1, para quem é surdo, tal como as línguas com expressão oral, ideográficas (ex: crioulo de Cabo Verde) ou fonéticas (ex: português), devem ser a L1, para quem é ouvinte, pois cada um destes tipos de língua constituem a língua natural para quem tem estas características: ser surdo ou ser ouvinte. Assim, é tão importante para um aluno surdo poder aprender e usar a sua língua natural (LGP, em Portugal), como é importante, para um aluno cuja L1 é o crioulo, poder usar, quando faz e aprende Matemática, as abordagens aos problemas, o tipo de raciocínio matemático e as estratégias de resolução que lhe são naturais, tal como ilustraram César (2024b) e César e Machado (2024a, 2024b).

Aquilo que é inovador, no que assumimos em relação à cultura, é considerarmos que a cultura cega é uma cultura em sentido restrito, como iluminámos em César e Machado (2025), através de diversos exemplos de interacções que analisámos. Os cegos utilizam a L1 da cultura em que participam, no país e família onde vivem. Se são filhos de pais cuja L1 é o português e vivem em Portugal, a sua L1 é o português. Por isso, do ponto de vista da oralidade, falam a mesma língua de quem não é cego. Logo, não têm uma língua que lhes seja própria, específica. Contudo, para ler e escrever, devido às suas características visuais, precisam de um sistema simbólico diferente, pois não podem ler e escrever naquilo que, habitualmente, se designa por "escrita a negro" (César & Machado, 2025; Santos, 2008). Para que consigam ler e escrever, precisam de um sistema simbólico que se baseie num dos quatro sentidos que conseguem utilizar: o tacto. Assim, foi criado o sistema Braille, que se caracteriza por ser uma célula, com seis pontos, que podem estar salientes, ou não, criando 63 combinações possíveis (César et al., 2014; César, Ventura, & Machado, 2013; Santos, 2008; Santos, Ventura, & César, 2008; Ventura, César, & Santos, 2010), que permitem escrever

as letras do alfabeto, algarismos, indicar pontuação, se é uma letra maiúscula, entre outros detalhes necessários à leitura e à escrita.

Há muitos anos que é consensualmente aceite que o Braille é o sistema simbólico mais indicado para os alunos cegos (ME, 1991), havendo mesmo recomendações de que seja usado, em aula, que possam responder aos testes e outros elementos de avaliação formal usando uma máquina ou computador com Braille, bem como que existam manuais escolares em Braille, uma alternativa que os alunos cegos preferem, à de serem áudio-gravados. As novas tecnologias vieram facilitar este processo, pois já existem impressoras que permitem imprimir em Braille o que foi escrito a negro e vice-versa, facilitando as trocas de apontamentos, ou a realização de trabalhos individuais ou em grupo. No entanto, o recurso ao sistema Braille cria desafios para alunos e professores, em aula. Em Matemática, o Braille tem especificidades próprias. Por exemplo, não permite escrever fracções de maneira semelhante à usada na escrita a negro, ou seja, com o numerador em cima e o denominador em baixo. Assim, em Braille, uma fracção tem de ser representada por um parêntesis adicional (César et al., 2013, 2014; César & Machado, 2025; Santos et al., 2008; Ventura et al., 2010). Um professor que não conheça esta especificidade, quando explica uma resolução que envolva fracções, pode ter um discurso que confunde os alunos cegos, porque fala em retirar os parêntesis e, em Braille, isso significa também retirar as fracções.

Assim, se os professores não souberem Braille, podem não compreender as dificuldades com que os alunos cegos se deparam, pois não percebem as particularidades desta cultura restrita, configurada pelo sistema simbólico que usa, para ler e escrever (César et al., 2013; César & Machado, 2025; Santos & César, 2009; Ventura et al., 2010). Por exemplo, uma tarefa que costuma ser usada para explorar os números primos, é o Crivo de Eratóstenes. Porém, o nível de dificuldade desta tarefa é diferente para cegos e não cegos. Quem usa escrita a negro, pode riscar, com lápis, e apagar, com uma borracha, emendando facilmente o que riscara. Mas, quem usa Braille, apaga com a unha, fazendo desaparecer os pontos salientes de uma determinada célula Braille. Por isso, se se enganar, não pode facilmente fazer reaparecer os pontos que apagou (César et al., 2013, 2014; César & Machado, 2025; Ventura et al., 2010). Assim, a velocidade na resolução da tarefa ou as dúvidas e inseguranças que surgem, são muito diferentes entre alunos

cegos e não cegos, independentemente dos seus conhecimentos matemáticos, como ilustram os autores já citados. Analisando a resolução de uma tarefa sobre números complexos, no 12.º ano de escolaridade, Santos (2008) e Santos e César (2008, 2009) assinalam também especificidades próprias de quem usa o sistema Braille e é cego, iluminando como a relação estabelecida com o professor e os colegas, bem como o processo interactivo, em aula, são essenciais para que estes alunos se sintam acolhidos e valorizados, promovendo o seu acesso ao sucesso escolar. Mas, se estas especificidades se fazem sentir nas aulas de Matemática, elas também existem noutras disciplinas, nomeadamente se pensarmos em disciplinas com uma forte componente experimental e laboratorial, como a Físico-Química (Silva, 2008; Silva & César, 2008).

Assim, a cultura cega, por não ter uma língua que a caracterize, não é uma cultura em sentido lato, como é a cultura surda. Porém, ao terem de recorrer a um sistema simbólico com especificidades próprias, ao terem de conhecer e compreender o mundo físico e social sem recorrerem à visão através dos olhos, pois os cegos vêem o mundo através do tacto, do olfato, do paladar e da audição, também constroem compreensões, enfrentam barreiras e têm maneiras de sentir e pensar, que são próprias de quem é cego. Estas particularidades que partilham entre si, e que não são semelhantes às de quem não é cego, fazem com que a cultura cega seja uma cultura em sentido restrito. Acontece com eles algo semelhante ao que descrevemos para quem partilha uma cultura de escola, ou uma cultura de sala de aula, que também são culturas em sentido restrito. A existência de uma cultura cega está bem patente numa frase que ouvimos a João dos Santos e que é citada por Carvalho e Branco (2000) "O horizonte – aprendi com os cegos – é aquilo que longinquamente está ao alcance da mão" (p. 57), uma definição de horizonte que só quem vê com as mãos, e não com os olhos, poderia dar. Por isso mesmo, ver com as mãos, cria também uma cultura própria, mas uma cultura em sentido restrito.

Esta frase de João dos Santos, mostra como ele era inclusivo *avant la lettre*, ou seja, muito antes de ter sido formulada a definição de inclusão. Só alguém profundamente inclusivo considerava que aprendia com os cegos e respeitava tanto a maneira deles verem e compreenderem o mundo, como a sua. Ser inclusivo é isso mesmo: perceber que as características próprias de cada um o fazem

compreender o mundo de uma determinada maneira e, por isso mesmo, o horizonte, para quem vê, é diferente do que é o horizonte para quem usa o tacto, como sentido que lhe permite ver. A promoção da inclusão, para João dos Santos, passou por criar condições de acesso à saúde mental infantil para todos, pois trabalhou em hospitais e centros de saúde públicos. Criou, para os cegos e amblíopes (como então se designavam as crianças com baixa visão), o Centro Infantil Hellen Keller, inaugurado em 1956. Nesta escola, em conjunto, aprendiam crianças cegas, amblíopes e outras sem estas características, partilhando aprendizagens e vivências. Foi considerada tão inovadora que muitos especialistas estrangeiros a visitaram, para aprenderem como ali se trabalhava: usando Braille, com materiais adaptados para que os cegos resolvessem as mesmas tarefas que as outras crianças, com expectativas elevadas em relação a todos os que a frequentavam. Quando foi concebida e começou a funcionar, esta escola era um exemplo de inclusão, apesar deste conceito ainda não ter sido cunhado, nessa altura. Isso leva vários alunos cegos, que a frequentaram, a falarem dela como algo essencial para o seu desenvolvimento, empoderamento e capacidade de intervenção. Uma sólida evidência empírica da relevância desta escola na sua trajectória de participação ao longo da vida, é que a mencionam frequentemente, de forma espontânea, mesmo quando as entrevistas e conversas informais decorrem muitos anos mais tarde (César & Machado, 2025; Santos & César, 2008, 2009), iluminando como aquela experiência os marcou.

Para além de ter fundado esta escola inovadora e os centros de saúde mental infantil, João dos Santos percebeu que era importante criar associações, onde os pais tivessem um papel significativo, que permitissem às pessoas em diversas condições (surdos, pessoas com paralisia cerebral, cegos, epiléticos, entre outros) sentirem-se apoiadas e terem interlocutores privilegiados para falarem com o poder político, defendendo os seus direitos. Isso deu-lhes autonomia e fê-los ser mais escutados do que eram até então, nas décadas de 50 e 60, durante o Estado Novo. Porém, não o fez para assumir cargos de Direcção. Criava-as, fomentava o seu desenvolvimento e, depois, outras pessoas assumiam os cargos directivos, enquanto ele partia para a criação de algo novo, que fosse necessário. Esta conjugação de ser o motor de, mas não se aferrar a cargos, de ter consciência de que estes benefícios tinham de estar acessíveis a todos e, por isso mesmo, muitos

deles serem em instituições públicas, fez dele alguém profundamente inclusivo, alguém que distribuía o poder, que dialogava com os diversos interlocutores, que partilhava as decisões com as equipas, que as respeitava e valorizava. João dos Santos considerava que existiam dois domínios fundamentais para garantir a democracia e a liberdade: a Saúde e a Educação.

> Desde jovem compreendi que a Educação e a Saúde tinham que ver com a democracia, e que eram incompatíveis com a ausência de liberdade. Lutei como pude, no meu desajeitamento político.
>
> (...)
>
> Ensinei aos meus filhos e aos meus discípulos que se deviam preparar para a luta – desde já, desde sempre – para que "um dia" pudessem trabalhar, com dignidade e com saber, para a Educação e para a Saúde do povo, e para o bem-estar de todos. (dos Santos, 1991a, pp. 209-210, aspas no original)

Este excerto revela as preocupações sociais e políticas de João dos Santos, bem como o seu compromisso com o bem-estar de todos, que corresponde aos ideais da uma educação e de uma sociedade interculturais e inclusivas. Ilumina, também, a consciência de que estes ideais não são fáceis de atingir, sendo necessário lutar por eles, ou seja, desenvolver o que César (2008) designa por uma consciência epistemológica. Esta clarividência torna João dos Santos um autor fundamental nos domínios da Educação, da Saúde, mas também como autor inclusivo, *avant la lettre*.

Quando pensamos no oposto, na falta de inclusão, percebemos que o exercício do poder pode ser bem diferente, nomeadamente no que se refere à interculturalidade, ou à falta de contextos escolares que sejam interculturais. Quando se fala de multiculturalidade, reconhece-se a co-existência de diferentes culturas num determinado contexto. Porém, elas co-habitarem aquele espaço e tempo, não significa que interajam entre si, que se respeitem e valorizem, mutuamente. Por isso, que as escolas sejam multiculturais, é uma inevitabilidade, na Europa do séc. XXI, onde os imigrantes são uma constante e em que muitos países não

conseguiriam sobreviver sem eles. Mas, o que precisamos, é de escolas interculturais, ou seja, onde exista diálogo entre as diferentes culturas, onde haja mediação cultural bi-unívoca (César, 2017; César & Machado 2024a, 2025), onde o poder esteja distribuído e todos tenham voz(es), podendo interagir enquanto participantes legítimos (César, 2009, 2024b; Lave & Wenger, 1991). Para que as escolas sejam inclusivas, têm de também ser interculturais, não basta que sejam multiculturais, ou seja, que apenas co-existam diversas culturas. Mas, para que sejam interculturais, a relação entre a L1 e a aprendizagem tem de ser analisada de modo aprofundado, como salientaram César (2024b) e César e Machado (2024a, 2024b).

Os estudos que relacionam a língua e a aprendizagem da Matemática foram desenvolvidos em diversos países, sistemas de ensino e contextos culturais (Planas, Morgan, & Schütte, 2021). Barwell (2009) refere-se às questões relacionadas com o multilinguismo, nas aulas de Matemática, em diferentes sistemas de ensino, contextos e continentes (Europa, Ásia, América do Norte e Austrália). Analisa as relações entre linguagem matemática formal e informal, bem como discute as relações entre as L1 dos alunos e as línguas de instrução. Reconhece que uma aula multilinguística pode referir-se a um conjunto muito diferente de situações, que vão desde a co-existência de múltiplas L1 numa sala de aula, à partilha e utilização de diversas línguas, que os alunos usam indiscriminadamente, quando falam. Por isso mesmo, é tão importante definir muito bem a que nos referimos quando falamos de multilinguismo. Também Halai e Clarkson (2016) afirmam que, nos últimos 30 anos, se reconheceu, de forma mais aprofundada, como a língua configura as aprendizagens, nomeadamente nas aulas de Matemática. Porém, salientam que é necessário ir além das preocupações com o papel da língua na cognição, em geral, compreendendo os impactes que esta tem na aprendizagem da Matemática, bem como nas questões sociais, culturais e políticas. Assim, procura-se deixar de encarar as L1 distintas da língua de instrução como "um problema", passando a analisar-se as possibilidades que estas abrem, quanto à aprendizagem da Matemática. César (2024b) e César e Machado (2024a, 2024b) partilham este posicionamento de encarar as L1, distintas da língua de instrução, como motores da aprendizagem de outras abordagens, raciocínios matemáticos e estratégias de resolução, que dão origem a melhores

desempenhos matemáticos e a um maior desenvolvimento. Discutindo e analisando diversos exemplos, mostram como uma educação matemática intercultural e inclusiva pode ser enriquecedora para todos os alunos, incluindo os da cultura maioritária e dominante, bem como para os que já obtinham elevado sucesso académico.

Civil e Hunter (2015) analisaram a participação do que designam por "alunos não-dominantes" na argumentação, em aulas de Matemática. Esclarecem que consideram como "não-dominantes" alunos imigrantes, que falam variações não-*standard* da língua de instrução, bem como os que participam em comunidades economicamente desfavorecidas. Os dois estudos de caso que discutem foram realizados nos Estados Unidos da América e na Nova Zelândia, cada um deles referindo-se a um aluno imigrante. A argumentação, nas aulas de Matemática, é promovida recorrendo a dois tipos de lente: cultural e linguística. Apesar de serem desenvolvidos em sistemas de educação diferentes, em ambos os casos existem critérios comuns, que favoreceram a argumentação, particularmente por parte destes alunos: o estabelecimento de relações interpessoais; e o encorajamento e o suporte oferecido aos alunos para que pudessem ser eles próprios, para que fossem aceites e valorizados. Estes resultados, embora referindo-se apenas alguns dos critérios citados por César (2002, 2009, 2013b, 2017, 2024b), corroboram o que esta autora observou, em Portugal. O respeito e valorização da diversidade é o que permite fomentar o trabalho colaborativo e dialógico, que esta autora considera essencial para a promoção das interacções entre pares, ou pequenos grupos. Assim, em vários contextos, muito diferentes em alguns critérios, as questões relacionais revelaram ser fundamentais para que os vários alunos possam actuar como participantes legítimos (César, 2009, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b; Lave & Wenger, 1991), promovendo o acesso ao sucesso escolar.

Civil (2012) realizou um estudo aprofundado sobre a educação matemática e os alunos imigrantes, considerando imigrantes aqueles cujos pais, ou eles próprios, tinham nascido num país diferente daquele onde vivem e frequentam a escola. Esta autora consultou as actas de vários eventos científicos internacionais onde este tema era abordado, realizando uma revisão da literatura. Num artigo posterior (Civil, 2020), expandiu e actualizou o que, então, tinha sido recolhido,

realçando que este é um tema preponderante, discutido segundo diversas perspectivas e abrangendo um leque de contextos muito diversificado. Apesar desta riqueza de estudos, nenhum se baseia numa meta-análise de cerca de 600 turmas, cujos dados foram recolhidos ao longo de 12 anos e cujos instrumentos de avaliação de capacidades e competências fossem desenvolvimentistas e construídos pela própria equipa do projecto de investigação, para serem utilizados por professores, tal como acontecia no projecto IC. É esta abordagem investigativa rara que torna os estudos citados em César (2024b) e César e Machado (2024a, 2024b) tão significativos, pois permitem diferenciar níveis de desempenho matemático, de tipos de abordagem aos problemas, raciocínios e estratégias de resolução naturais, em função da L1. Como estes autores afirmam, o nível das capacidades e competências avaliadas é semelhante para os alunos cuja L1 é o crioulo e aqueles cuja L1 é o português. O que varia são as abordagens aos problemas, os tipos de raciocínio e as estratégias de resolução que uns, e outros, preferem, ou seja, que lhes são naturais. Até então, estas evidências empíricas nunca tinham sido analisadas. Mostram, de forma inequívoca, como as questões de poder, nomeadamente este ser, ou não, distribuído, afectam os desempenhos matemáticos, particularmente de alunos cuja L1 não é a língua de instrução e cujas formas naturais de abordagem dos problemas, raciocínios matemáticos e estratégias de resolução são distintas das preferidas pela cultura maioritária e dominante, cuja L1 é a língua de instrução. Por isso mesmo, não se pode discutir a inclusão sem ter em consideração as questões de poder, a equidade e a justiça social.

Skovsmose (2012, 2022) também discute questões relacionadas com o poder, a equidade e a justiça social quando assume como paradigma a educação matemática crítica. Considera que a educação matemática crítica, em sentido lato, pode ser usada por muitos autores, mesmo por aqueles que não ostentam esta etiqueta, quando escrevem ou intervêm, em aula.

> A noção de educação matemática crítica pode ser usada num sentido lato, e não faço qualquer distinção entre educação matemática crítica e educação matemática para a justiça social. Na verdade, pode-se estar envolvido na educação

> matemática crítica sem usar o rótulo. O importante é o que se pretende com as atividades educativas.
>
> Normalmente não tento caracterizar a educação matemática crítica em relação a algumas posições teóricas ou metodologias de sala de aula específicas, mas em termos das suas preocupações. A seguir, delinearei quatro dessas preocupações – embora mais possam ser acrescentadas –, nomeadamente no que diz respeito à justiça social e à política, ao poder e à matemática, às possibilidades futuras dos estudantes e à estruturação sócio-política da educação, que estão todas inter-relacionadas e integradas. (Skovsmose, 2022, p. 367)

As preocupações sublinhadas por Skovsmose (2012, 2022) também eram assumidas pela equipa do projecto IC, que discutiu como fomentar a equidade e a justiça social, critérios fundamentais de uma educação intercultural e inclusiva. As questões de poder, nomeadamente como este podia ser distribuído, a importância dos mecanismos de inter-empowerment (César, 2009, 2013a), das mensagens implícitas (César, 2014, 2024b; César et al., 2014; César & Machado, 2024a, 2024b) e da mediação cultural bi-unívoca (César, 2017; César & Machado, 2025) ilustram claramente como este projecto se preocupava com o empoderamento dos diversos participantes. Aquilo que Skovsmose (2022) designa por "possibilidades futuras dos estudantes" está incluído num constructo cunhado por César (2009): trajectória de participação ao longo da vida. Assim, o projecto IC assumiu muitos dos princípios da educação matemática crítica, embora também não tenha utilizado outros, pois, em aula, propunha tarefas de diferentes naturezas, mas não exclusivamente investigações. No entanto, recorria a tarefas que podiam ser resolvidas utilizando diferentes tipos de abordagem, raciocínio e estratégias de resolução, respeitando as formas naturais de cada aluno fazer e aprender Matemática, o que corresponde a um dos princípios da educação matemática crítica.

Abrantes (1994), César (2009, 2013a, 2014, 2024b), César e seus colaboradores (2014) e Rose (2002) realçam um outro aspecto fundamental: que o próprio currículo, através das formas de operacionalização a que se recorre, em aula, pode ser utilizado como um veículo para a inclusão ou para a exclusão. Rose (2002) referia-se a alunos designados como em condição de Necessidades Educativas Especiais (NEE), frequentando escolas do ensino regular, no Reino

Unido, e como a operacionalização do currículo, dentro e fora da sala de aula, podia contribuir para ultrapassar as dificuldades de aprendizagem destes alunos, preparando a autonomia futura e a empregabilidade. César (2014) e César e seus colaboradores (2014) preferem designar estes alunos como precisando de Apoios Educativos e Sociais Especializados (AESE), o que alarga o espectro de acção da educação para a sociedade, precisamente para facilitar a manutenção da autonomia, fora da escola, na vida familiar, social e profissional. Estudam a inclusão destes alunos baseada no trabalho colaborativo e dialógico, em escolas e turmas do ensino regular. Discutem o papel essencial de diversos critérios que promovem a inclusão, como a primeira semana de aulas destinada a conhecer as capacidades e competências dos alunos (César, 2009, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b, 2025), o contrato didáctico ou as formas de avaliação utilizadas no projecto IC (César, 2009, 2013a, 2013b). Este mesmo projecto de investigação, baseado no trabalho colaborativo e dialógico, era também usado em turmas e escolas, onde algumas minorias culturais, sócio-culturalmente desvalorizadas, vivenciavam diversas formas de exclusão, nomeadamente insucesso académico cumulativo e rejeição, por parte dos colegas e de alguns professores, que não aceitavam as suas abordagens aos problemas, raciocínios e estratégias de resolução.

Abrantes (1994) recorreu ao trabalho de projecto, realizado em pequenos grupos, bem como a formas inovadoras de avaliação, como os testes em duas fases, em que os alunos resolviam, individualmente, um teste de avaliação, recebiam uma classificação provisória e diversos comentários às suas resoluções e, depois, tinham oportunidade de melhorá-las. Este projecto centrava-se no 3.º ciclo do ensino básico (7.º ao 9.º ano de escolaridade), em aulas de Matemática. Em comum tinham o referirem-se ao ensino diurno, em escolas públicas do ensino regular, e seguirem o currículo previsto para estes anos de escolaridade. Em Portugal, até ao 9.º ano de escolaridade, existia (e existe) um currículo único, igual para todos os alunos, sem disciplinas de opção, o que fazia alguns alunos sentirem-no como desajustado em relação aos seus interesses, uma vez que as Artes e o Desporto tinham muito pouco peso nas disciplinas existentes e havia poucas oportunidades relativas a cursos profissionais.

Os autores acima citados pretendiam promover a educação inclusiva e, no projecto IC, uma educação intercultural e inclusiva, que promovesse o sucesso académico e escolar, em turmas do ensino regular. Divulgavam práticas interculturais e inclusivas, que contribuíam para diminuir significativamente o insucesso escolar, nomeadamente em Matemática. No projecto IC designávamos por sucesso académico as classificações académicas obtidas e por sucesso escolar o conjunto das classificações académicas e aceitação pelos pares, ou seja, também considerava a socialização alargada, nomeadamente na comunidade escolar. Assim, a noção de sucesso escolar é mais abrangente do que a de sucesso académico. Neste projecto, tal como neste livro, usávamos a designação Escola, quando nos referíamos à instituição escolar, e a designação escola, com letra minúscula, quando se tratava de uma determinada escola, em particular. Do ponto de vista conceptual, distinguíamos sala de aula (espaço físico), da expressão "em aula" (espaço pedagógico). Assim, havia um particular cuidado de clarificação conceptual, baseada no rigor da terminologia utilizada. Porém, tratando-se de um projecto desenvolvido ao longo de 12 anos e com um *follow-up* de 10 anos, podem-se observar diversas transições teóricas, metodológicas e nas práticas, que Ventura (2012) e Ventura, César e Matos (2013) descreveram e analisaram. Estas transições ilustram a preocupação e o cuidado da equipa do IC em melhorar e complementar estes aspectos, ao longo dos anos, assumindo, na própria investigação, uma perspectiva desenvolvimentista.

O projecto Mat789 (Abrantes, 1994) e o projecto IC pretendiam, ainda, contribuir para evitar abandonos escolares precoces e para promover a participação legítima (César, 2009; Lave & Wenger, 1991), dando vozes aos alunos que, habitualmente, agiam como participantes periféricos. Estes alunos eram silenciados, por não se ajustarem ao sistema de ensino previsto e, muitas vezes, não participarem na cultura dominante. Assim, o que estes autores propunham correspondia a possíveis formas de os professores agirem como decisores (Leite & Sousa-Pereira, 2023), usando as margens de liberdade que os currículos prescritos, em Portugal, encerram: que tarefas propor; que formas de avaliação, baseadas em que instrumentos; o tipo de interacções a promover, em aula (verticais, professor/aluno; ou horizontais, aluno/aluno, baseadas no trabalho colaborativo, em díade ou em pequenos grupos); entre outras características das práticas que

lhes cabia decidir. Leite e Sousa-Pereira (2023), ao elaborarem uma análise crítica da formação de professores, em Portugal, salientam alguns aspectos relevantes, nomeadamente a necessidade de uma socialização que prepare os professores para saberem usar a agência (*agency*), o que lhes permite reconfigurar o currículo prescrito, através da sua operacionalização, nomeadamente das práticas em aula, adaptando-o à diversidade dos alunos que compõem, hoje em dia, a população escolar.

> Com essa formação, é esperado que os futuros professores reconfigurem o currículo (Leite, Fernandes, & Figueiredo, 2018, 2019; Paliwal & Subramaniam, 2006), que em Portugal é prescrito a nível nacional, de modo que ele ganhe sentido para todos os alunos a quem ele se destina. É nesta perspectiva que tem sido proposto que os professores sejam formados e socializados para serem decisores curriculares, no uso do seu poder de agência (Biesta & Tedder, 2006; Melo et al., 2022, 2023; Priestley, Biesta, & Robinson, 2015; Santos & Leite, 2020). (Leite & Sousa-Pereira, 2023, pp. 2-3)

Em Portugal, as elevadas percentagens de insucesso académico e os abandonos escolares precoces, que então se faziam sentir, impediam diversos alunos, com insucesso académico cumulativo, de concluírem o ensino básico, que então correspondia à escolaridade obrigatória (9.º ano de escolaridade). Por isso, foi permitido criar o que os documentos legais designavam por currículos alternativos (SEEI, 1996) e que César (2002) ou Courela e César (2004, 2008, 2012) preferem designar por "currículos em alternativa", como então justificaram. Estes currículos pressupunham um trabalho prévio, realizado pelos professores, ou por estes em colaboração com os futuros alunos e outros membros da comunidade educativa e da comunidade social. Devia elaborar-se um currículo em alternativa, a propor ao Ministério da Educação, para ser implementado nos anos lectivos seguintes. Podia abranger uma ou mais turmas, que justificassem a necessidade de um currículo em alternativa ao currículo prescrito. Geralmente, existia um trabalho colaborativo e voluntário, por parte de professores do quadro da escola e, muitas vezes, de investigadores, que propunham disciplinas para além das habituais, dando mais ênfase à educação artística, ou profissional, uma vez que

estes currículos em alternativa comportavam, habitualmente, um estágio profissional no último ano, que pretendia facilitar a futura empregabilidade.

> no início, os currículos em alternativa surgiam quando um grupo de professores, empenhado e criativo, decidia que os alunos tidos como os mais problemáticos também tinham direito a uma alternativa educacional viável e decidiam reunir-se, trabalhar em conjunto, para encontrarem soluções que evitassem a exclusão de alunos que estavam em vias de abandonar a Escola precocemente. Como é evidente, estes projectos só eram viáveis com a concordância dos orgãos de gestão da escola. Eram eles que facilitavam a concepção de horários que permitissem aos professores reunirem-se uma vez por semana para debaterem as alternativas curriculares que estavam a ser implementadas, que assumiam parte das responsabilidades perante as instituições tutelares externas e que garantiam, por exemplo, a continuidade pedagógica essencial a um projecto deste tipo, que só se justificava se abrangesse todo um ciclo de estudos. (César, 2002, p. 93)

César (2002) participou na elaboração e implementação de um currículo em alternativa, durante o 3.º ciclo do ensino básico (7.º ao 9.º ano de escolaridade), que fazia parte do projecto de investigação *Muitas Vozes*. O nome espelhava o que se pretendia: escutar os diversos participantes, dar-lhes voz(es), criar o que Wertsch (1991) designava por intersubjectividade, que permitia dar voz aos ecos, ou seja, transformar alunos silenciados em participantes legítimos (César, 2009, 2024b; Machado & César, 2024a, 2024b, 2025; Lave & Wenger, 1991). Stoer, Magalhães e Rodrigues (2004), ao considerarem que as escolas constituíam um dos lugares de exclusão social, realçavam a importância das práticas inclusivas, que respeitassem a diversidade. César (2002) salientava que havia basicamente duas maneiras de sobrevivermos à exclusão e ao sofrimento causado pela diferença e rejeição, escolar e social: (1) rebelando-nos, o que pode levar a confrontos com a autoridade, como tinha acontecido a muitos destes alunos; ou (2) silenciando-nos, o que nos retira a voz, transformando-nos em ecos (Wertsch, 1991), ou em participantes periféricos (César, 2009, 2013a, 2024b; Lave & Wenger, 1991). Estes alunos tinham mostrado rebelião, dentro e fora da escola, mas também tinham sido silenciados, dentro e fora dela. Por isso se

sentiam tão sem rumo, à deriva. Daí precisarem de um currículo em alternativa que lhes desse voz, que os fizesse sentir respeitados e escutados.

César (2002) afirmava que, muitas vezes, quem mais precisa de ajuda é quem não é capaz de a aceitar, pois já nem acredita que ela possa existir. Ser capaz de pedir ou aceitar ajuda é estar acima do limbo de sofrimento em que muitos destes alunos tinham mergulhado. Por isso mesmo, a disponibilidade dos professores, as expectativas e empenho que mostravam, mesmo quando não parecia haver interesse, por parte dos alunos, bem como as tutorias, foram critérios essenciais para se atingirem pontos de viragem, em que os alunos começassem a estar disponíveis para interagir, entre eles e com os professores, ou para aprender. Aprender exige um estado de paz interior, de pacificação, que era importante conseguir. Como afirmava João dos Santos (1991b), a vida interior é determinante para os encontros que conseguimos, ou não, estabelecer.

> Ser ou estar disponível é ter uma vida interior que se organize em termos de deixar espaço para a sensibilidade e para a sabedoria dos outros. O encontro não é só obra do acaso, é também obra da disponibilidade recíproca daqueles que se encontram. O encontro depende da convicção do que de perene existe nos nossos semelhantes. (dos Santos, 1991b, p. 270)

Este currículo destinava-se a alunos com forte insucesso académico cumulativo, o que os levava a um risco acrescido de abandonarem a escola, assim que completassem 18 anos de idade cronológica. Para alguns deles, isso seria ainda durante a frequência do 7.º ano de escolaridade, sem terem concluído o 3.º ciclo do ensino básico. Este currículo em alternativa incluía um estágio profissional durante o 9.º ano de escolaridade, que foi um importante veículo de inclusão, como mostram os relatos destes alunos, num *follow-up* realizado 10 anos após terem participado nestas turmas e que mostra o impacto das práticas vivenciadas, nomeadamente nas aulas de Matemática. Tratando-se de alunos com formas de actuação disruptivas, dentro e fora da escola, a realização deste *follow-up* reveste-se de particular importância para se perceber, a médio prazo, se este currículo em alternativa, e as dinâmicas relacionais que o caracterizavam, por exemplo cada

professor ser tutor de dois alunos, tiveram impactes positivos na posterior socialização destes alunos, bem como na vida profissional e familiar.

César (2002) afirma que o resultado mais saliente, no *follow-up*, foi o carácter estruturante daquelas vivências. Aqueles alunos ainda utilizavam mecanismos de controle emocional, evitando a agressividade verbal e física, recordando o que tinham aprendido, relacionalmente, naqueles anos. Nenhum deles tinha voltado a ser preso ou tido problemas graves com a justiça. Muitos tinham famílias e empregos estáveis, sentindo-se realizados. Nenhum tinha filhos que não tivesse reconhecido, com quem não vivesse ou que visse e acompanhasse regularmente. Por isso, para aqueles alunos, este currículo em alternativa tinha constituído uma hipótese de traçar uma trajectória de participação ao longo da vida (César, 2009) bem diferente da que teriam tido se não mudassem de rumo, naquela altura. Como salientava João dos Santos (1991a), "A educação e o ensino devem preparar para a vida e não para o exame" (p. 41) e, poderíamos acrescentar, é essa a marca mais visível de uma educação intercultural e inclusiva. Assim, este currículo em alternativa foi uma oportunidade de distribuir o poder, aumentando a auto-estima positiva dos alunos, a equidade e a justiça social, abrindo-lhes oportunidades para um futuro mais pacificado e com maior realização pessoal, profissional e social.

César e Oliveira (2005) e Oliveira (2006) relatam a conceptualização e implementação de um outro currículo em alternativa, destinado a alunos do 2.º ciclo do ensino básico (5.º e 6.º ano de escolaridade) cujas culturas estavam muito afastadas da Escola e que tinham vivenciado insucesso académico cumulativo e diversos problemas de indisciplina. A operacionalização deste currículo em alternativa pretendia criar novas oportunidades de aprendizagem, evitando a exclusão. Por isso, em vez de insistirem em repetições de anos de escolaridade com o mesmo tipo de currículo, tarefas escolares e formas de avaliação, preferiram investir na formação de professores, no trabalho colaborativo entre quem ia leccionar esta turma e num contrato didáctico que favorecesse a inclusão de alunos que, muitas vezes, tinham apresentado formas de agir disruptivas. César (1998a) salienta a importância de como se encaram e resolvem as questões relacionadas com a indisciplina.

> Os casos de indisciplina, exigem soluções diversificadas. Mas todos eles precisam de disponibilidade, esforço, paciência, e, nos casos mais difíceis, tempo. Não há casos perdidos, há é casos que não têm soluções rápidas e em que é preciso investirmos muito, antes de vermos resultados. (César, 1998a, p. 2)

Tanto o projecto *Muitas Vozes* (César, 2002), como o currículo em alternativa descrito e analisado por César e Oliveira (2005) e Oliveira (2006), se destinavam a alunos que frequentavam o ensino básico regular diurno. Porém, alguns currículos em alternativa foram concebidos para alunos adultos, com poucas habilitações literárias, como referem Courela (2007, 2014) e Courela e César (2004, 2008, 2012, 2014). Estes currículos em alternativa, que faziam parte do projecto IC, eram uma alternativa ao ensino recorrente nocturno, tendo turmas bastante mais reduzidas (N=7), que recorriam a trabalhos de projecto, realizados de maneira colaborativa e dialógica. Pretendiam que estes alunos concluíssem o 3.º ciclo do ensino básico, ou seja, eram equiparados ao 9.º ano de escolaridade. Estes trabalhos de projecto colaborativos e dialógicos foram essenciais para dar voz aos alunos, empoderando-os e desenvolvendo a sua socialização alargada, dentro e fora da escola. No final, conceberem e porem em prática acções de divulgação pública dos projectos realizados, foi uma importante ferramenta de empoderamento, que permitiu dar voz a estes alunos. Como salientava Freire (1999), proporcionar aos alunos uma educação formal, que se lhes adeque, é uma forma de promover a inclusão.

> A educação, para não instrumentar tendo como objeto um sujeito – ser concreto, que não somente está no mundo, mas também está com ele –, deve estabelecer uma relação dialética com o contexto da sociedade à qual se destina, quando se integra neste ambiente que, por sua vez, dá garantias especiais ao homem através de seu enraizamento nele. (Freire, 1999, p. 35)

Courela (2007) e Courela e César (2004, 2008, 2014) descrevem diversos detalhes deste currículo em alternativa, desde a sua elaboração à operacionalização, analisando os contributos deste para uma educação para a sustentabilidade, que promovesse uma cidadania activa, crítica e participativa. Isso correspondia

a "estabelecer uma relação dialéctica com o contexto da sociedade à qual se destina" (Freire, 1999, p. 35), como acima menciona o excerto citado. Permitia desenvolver um sentimento de pertença aos diversos contextos (educativo, social, profissional), bem como de valorização das culturas em que cada um destes alunos participava. A realização de um *follow-up*, com a duração de 10 anos (Courela, 2014; Courela & César, 2012), permitiu acompanhar a trajectória de participação ao longo da vida destes alunos, compreendendo de forma mais aprofundada os impactes que este currículo em alternativa teve nos diversos contextos em que eles se movem.

Como afirma César (2002), se existisse uma educação intercultural e inclusiva em todas as escolas públicas, os currículos em alternativa não seriam necessários. Quando se desenvolve uma educação que assume este paradigma, as características, interesses, capacidades e competências dos alunos são respeitadas e valorizadas, o que lhes permite terem acesso ao sucesso escolar. Os professores actuam como decisores e transformadores do currículo prescrito, tornando-o acessível aos diversos alunos e evitando que casos tão extremos, como os que motivaram a criação destes currículos em alternativa, cheguem a existir. Assim, o ideal será que, como se pretende no projecto IC (César, 2003, 2009, 2013a, 2013b), a operacionalização do currículo prescrito, nacional, seja feita de tal maneira que os diversos alunos ganhem voz(es) e se assumam como participantes legítimos daquela comunidade educativa (César, 2009, 2024b; Lave & Wenger, 1991). Este é o ideal que propõe a Declaração de Salamanca (UNESCO, 1994), bem como os autores que mais discutiram e divulgaram os princípios da educação inclusiva, como Ainscow (1991, 1999), Ainscow e César (2006), Ainscow, Porter e Wang (2000), Allan (2008) ou Mittler (2000).

Por isso mesmo, o trabalho realizado nas escolas públicas do ensino regular é tão importante, pois apenas uma operacionalização que leve à inclusão e evite a exclusão, pode evitar a necessidade de currículos em alternativa. Foi para permitir isso mesmo que o projecto *Interacção e Conhecimento* (IC) foi concebido e posto em prática, permitindo que, no ensino regular diurno, e seguindo o currículo prescrito, os alunos conseguissem sentir-se incluídos e tivessem acesso ao sucesso escolar, definindo uma trajectória de participação ao longo da vida que lhes facilitasse sentirem-se realizados e onde pudessem aproveitar e continuar a

desenvolver as suas capacidades e competências, bem como as aprendizagens. Este projecto beneficiou das aprendizagens que aqueles currículos em alternativa, desenvolvidos até 1990 e cujo *follow-up* decorreu em 2000/01, tinham permitido (César, 2002), nomeadamente uma compreensão mais alargada do que estes alunos precisavam, em aula. Posteriormente, o trabalho realizado por César (1994) também forneceu informações essenciais sobre os raciocínios e estratégias de resolução utilizados, critérios para formação das díades e necessidade de conhecer as capacidades e competências matemáticas dos alunos, desde a primeira semana de aulas, ou seja, atempadamente (César, 2024b). Porém, o aspecto mais determinante foi a criação da equipa do projecto IC, que trabalhava de forma colaborativa e dialógica, envolvendo investigadoras (quatro psicólogas, incluindo a coordenadora) e professores. Sem esta equipa, o Instrumento de Avaliação de Capacidades e Competências (IACC) relacionadas com a Matemática, um instrumento desenvolvimentista (Machado, 2014), não teria sido elaborado e, sem ele, não teria sido possível promover uma educação intercultural e inclusiva, empoderando os alunos e fomentando o seu acesso ao sucesso escolar, em turmas do ensino regular. Posteriormente, foi também elaborado um IACC relativo às Ciências e outro que se relacionava com a Filosofia, Línguas, História e Geografia, permitindo alargar a acção do projecto IC a mais disciplinas do ensino básico e secundário, contribuindo também para a formação de professores de diversas disciplinas.

Paim e Bazzotti (2022), analisando a obra de Paulo Freire, salientam que o currículo não deve servir as lógicas de mercado. Deve contribuir para a indignação, conscientização e esperança. Consoante a maneira como o currículo é operacionalizado, em aula, contribui para a inclusão de todos, ou para a exclusão, mais ou menos subtil, de alguns. Tarefas escolares adequadas às capacidades e competências dos alunos, facilitando o seu desenvolvimento e aprendizagem, que tenham em consideração os seus interesses e necessidades, contribuem para a inclusão. Tal como Christiansen e Walther (1986), designamos por tarefa aquilo que os professores propõem aos alunos e por actividade o que os alunos fazem ao resolver uma determinada tarefa. Em Portugal, os currículos e recomendações dos documentos de política educativa permitem muitas formas diferentes de operacionalização. Daí a importância da formação, para que os

professores possam ser decisores, como salientam Leite e Sousa-Pereira (2023), para que estes desenvolvam uma consciência epistemológica (César, 2008, 2010) e qualidade relacional (César et al., 2014). Para isso, são essenciais instrumentos de avaliação diversificados e práticas, em aula, que aceitem e confrontem diversas abordagens, raciocínios e estratégias de resolução em relação a uma mesma tarefa matemática (César, 2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b).

Quando se promove a inclusão, aumenta-se a equidade, o que é diferente de igualdade. Faustino e Skovsmose (2020) também salientam que preferem falar de equidade e não de igualdade devido à diferença de poder que existe entre professores e alunos, bem como às interferências que as estruturas de poder podem ter nos processos interactivos entre professores e alunos. Estes autores sublinham a importância de existir equidade nas aulas de Matemática, como forma de promover a comunicação.

> Preferimos, no entanto, falar de equidade, pois esta noção foi desenvolvida para incluir muito mais aspectos do que a interpretação filosófica clássica da igualdade. Nos contextos da sala de aula, alunos e professores estão em diferentes posições de poder, por exemplo, no que diz respeito à responsabilidade, às obrigações e ao conhecimento. Tais diferenças podem impactar as estruturas de poder nas interações professor-aluno. Ainda assim é possível falar de um diálogo entre professores e alunos, se estas diferenças de posições não definirem o rumo da comunicação. Esta é a ideia de realçar a característica da equidade e a relevância de professores e alunos construírem a equidade na sala de aula de matemática (ver Skovsmose, no prelo). (Faustino & Skovsmose, 2020, p. 9)

Para César (2009, 2014, 2017) e César e seus colaboradores (2014), a equidade garante a cada aluno aquilo de que ele necessita para poder ter acesso ao sucesso escolar e para traçar uma trajectória de participação ao longo da vida em que se sinta realizado, em que actualize as suas potencialidades, transformando-as em capacidades e competências. Mas, como os alunos são diversos, o que cada um deles necessita também é diferente. Todos precisam de se sentir respeitados, valorizados e admirados. O que varia é o que é preciso fazer para que isso

aconteça. Para alunos cujas L1 são ideográficas é preciso deixá-los utilizar as abordagens aos problemas, raciocínios matemáticos e estratégias de resolução que, para eles, são naturais. Para os alunos cegos é preciso dar-lhe documentos em Braille, evitar fazer gestos com as mãos, pois eles não os podem ver, descrever tudo o que se vai escrevendo no quadro, ou que está no *powerpoint*. Uma medida simples e gratuita, que os professores/investigadores do projecto IC adoptaram quando lecionavam alunos cegos, consistia em explicarem os raciocínios com as mãos nos bolsos, para não incluírem gestos. Há medidas muitos fáceis de ensinar na formação inicial e contínua de professores e que poderiam ser implementadas. Mas, para isso, é preciso que estas temáticas sejam obrigatórias na formação de professores e tenham uma componente prática forte, baseada na discussão de casos reais, em *role-playing*, na análise de vídeos (César, 2012b, 2014; César & Machado, 2025). Para os surdos é importante ter intérpretes de Língua Gestual Portuguesa (LGP), deixá-los usar glossários ou dicionários em aula, ou nas avaliações. Tanto para cegos, como surdos, é fundamental que tenham mais tempo para resolverem os instrumentos de avaliação. Por isso, para que haja justiça social, o que se precisa é de equidade, não de igualdade, pois cada um tem as suas próprias necessidades, que devem ser respeitadas e satisfeitas, nas escolas do ensino regular diurno.

Ernest (2024) salienta que "a educação matemática, especialmente as suas atividades centrais de ensino e de aprendizagem da matemática, está profundamente entrelaçada com questões de ética, equidade e justiça social" (p. 4). Para promover a equidade na educação matemática (Secada, 1995), é preciso levar muito a sério as questões relacionadas com o poder (Abreu et al., 1997; Apple, 1995; César, 2009, 2010, 2013b, 2017, 2024b), algo que Cornelius e Herrenkohl (2004) também discutem em relação às Ciências e ao papel que o poder desempenha nas relações entre os alunos e entre estes e o saber. Não se promove a inclusão, nem se aumenta a equidade e a justiça social se não se distribuir o poder, se não se estiver muito atento aos implícitos, que tantas vezes constituem formas subtis de exclusão (Apple, 2009; César, 2013a, 2014, 2017, 2024b). Algumas mensagens implícitas podem ser devastadoras para os alunos: nunca os deixar responder ou ir ao quadro; pôr-lhes uma questão e dar a resposta antes de eles terem tempo de responder; não dar exemplos relacionados com as suas culturas

e apenas usar os da cultura dominante. Estas formas de agir dizem-lhes, de forma implícita, que o professor não acredita que eles sejam capazes de aprender e responder, nem nas suas capacidades e competências, que não valoriza a cultura em que participam. Mostram-lhes, sem o explicitar, que a Escola não é para eles. Mas, como estas formas de exclusão são implícitas, causam danos e sofrimento, mas são muito mais difíceis de contestar. Muitas vezes nem sequer são identificadas pelos alunos, ou pelos encarregados de educação, como algo que está a prejudicar e a excluir aqueles alunos. Frequentemente, nem os professores se apercebem dos impactes negativos que estas formas de agir e reagir têm. Quanto aos alunos, muitos deles, depois de vários anos em que isto acontece, optam por nem tentar, por acreditar que são incapazes de aprender, mesmo quando mobilizam imensas capacidades e competências, como ilustraram César (2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b) e César e Machado (2024a, 2024b). Os impactes destas vivências na consolidação de uma auto-estima negativa, no desenvolvimento, aprendizagens e insucesso escolar são enormes e devem ser evitados.

Apple (1999) salienta que, uma das formas subtis de exclusão, é decidir o que é considerado conhecimento legítimo, tanto em cenários de educação formal, como noutros, onde as questões de poder são habitualmente menos discutidas, como a publicação de artigos e respectivas revisões, em revistas da especialidade. Assim, não é apenas nas escolas, nem nas salas de aula, que as questões de poder são determinantes. Isso também se faz sentir entre os investigadores e académicos, para os quais as questões relacionadas com o poder e as culturas dominantes estão longe de ser neutras ou de estar resolvidas, como Apple (1999) refere. Como sublinha, as questões epistemológicas relacionadas com "o que os dados dizem" são muito complexas. Pedindo, a vários académicos, que assumiam diferentes abordagens conceptuais e políticas, que fizessem uma revisão (*review*) de artigos sobre *Discurso e Educação*, obteve revisões muito distintas, até quanto à decisão de aceitação ou rejeição de cada artigo considerado. Isso mostra como os critérios de aceitação ou rejeição, mesmo quando (aparentemente) conhecidos e previamente definidos, podem ser interpretados e operacionalizados de maneiras muito diferentes, por distintos revisores.

Também César (2010) realça a importância de se discutir o que é legitimado na investigação, nomeadamente através dos estudos que são feitos, dos

temas escolhidos para obterem financiamento de entidades externas, das opções teóricas, das questões de investigação e daqueles a quem as investigações dão (ou retiram) voz(es). Halai e Clarkson (2016) reconhecem que houve "uma mudança no estatuto das línguas (por exemplo, o inglês como língua dominante da ciência e tecnologia)" (p. 3), o que cria desafios novos. Como realça César (2010), ao ser a língua inglesa a que é aceite nas revistas mais cotadas, bem como nos eventos científicos internacionais, aqueles que não são fluentes nesta língua, ficam excluídos, mesmo que seja de uma forma mais subtil. Não são proibidos de participar, mas nem se atrevem a inscrever, porque se sentem desconfortáveis ao terem de comunicar numa língua que não dominam. Para além disso, a maioria dos eventos científicos têm custos de inscrição elevados, algo que agora também sucede em muitas das revistas científicas mais cotadas (ex: *Q1* e *Q2* indexadas na base de dados *Scopus*) e que mais valorizam o *Curriculum Vitae* de quem nelas publica. Por isso, para os investigadores cujos salários são mais baixos, como acontece nos países mais pobres e periféricos, participar nestes eventos ou publicar nestas revistas torna-se proibitivo, o que mostra a falta de inclusão existente. Assim, muitos dos eventos científicos da especialidade e publicações que discutem as questões da educação intercultural e inclusiva são, eles próprios, veículos de exclusão.

Outra questão complexa é a que se prende com a existência de *blind reviews*, ou seja, omitir os nomes dos autores, incluindo as citações dos mesmos e as referências bibliográficas, como suposta forma de garantir uma revisão de textos mais justa. Porém, se os revisores forem especialistas daquele domínio, bastam alguns dados fundamentais da metodologia, ou dos próprios resultados, para o projecto de investigação ser identificado. Por exemplo, que outro projecto, para além do projecto IC, acompanhou, durante 12 anos, cerca de 600 turmas e tem 69 professores/investigadores de Matemática, em Portugal? Portanto, basta este dado constar da metodologia para se saber qual é o projecto e ser fácil perceber quem escreveu aquele texto. Os diversos enviesamentos que podem resultar de um processo de avaliação (*reviews*) em que se reconhecem os autores, mas, enquanto revisores, decidimos sobre uma aceitação ou rejeição, sem nos identificarmos, são algo que deveria ser discutido seriamente pela comunidade científica. Como se compreende, muitas questões de poder, equidade e justiça social

se podem levantar neste domínio, ou seja, também na academia e investigação existem questões interculturais, de inclusão e distribuição de poder, que não estão resolvidas.

Para César (2010), bem como para Allan e Slee (2008), ou Armstrong e Moore (2004), é importante que a própria investigação seja inclusiva, sob pena de se tornar mais um veículo para a exclusão. Porém, raramente os participantes exprimem a(s) sua(s) voz(es) nas decisões de investigação ou nas interpretações que são publicadas, algo essencial para que a investigação seja realmente inclusiva (César, 2013b, 2017, 2024b; César & Machado, 2025). César (2010) discute a questão de serem apenas pessoas ouvintes a investigar sobre surdez, pois é uma forma subtil de retirar voz aos surdos, de não os deixar actuar como participantes legítimos (Lave & Wenger, 1991) num domínio de investigação em Educação Matemática, que lhes diz directamente respeito e sobre o qual eles deveriam ter muitas questões de investigação relevantes a sugerir.

César (2002) também refere que, para a investigação poder ser considerada inclusiva, é preciso que os investigadores tenham muito cuidado com a maneira como deixam o palco, depois de recolhidos os dados. Sobretudo para os participantes mais vulneráveis, cujas famílias são mais desestruturadas, que mostram diversas formas de agir e reagir disruptivas, que se sentem mais excluídos, no contexto educativo e no contexto social, que têm menos esperança no futuro, ou que necessitam de AESE. Os investigadores desaparecerem assim que termina a recolha de dados, é vivido como um abandono, que eles não conseguem aceitar, nem viver pacificamente, como revelaram os dados do *follow-up* (César, 2002). Mais uma vez, a maneira como os investigadores entram e deixam a cena, é uma questão de poder, de como este é usado, se é distribuído, ou não, de como se consideram os participantes (legítimos ou periféricos), ou que cuidados se têm, ou não, em relação a eles.

César (2003, 2009, 2013b, 2014, 2017, 2024b) e César e seus colaboradores (2014) analisam diversos excertos em que se percebe como a existência de um *follow-up* de 10 anos foi importante para os alunos que eram confrontados com mais formas de discriminação social, seja por participarem em culturas sócio-culturalmente desvalorizadas, seja por terem necessidade de AESE. A utilização, na investigação, de mecanismos de *inter-empowerment* (César, 2009,

2013a), associados a mensagens implícitas que promoviam o empoderamento dos alunos, complementada pela existência de um *follow-up* longo, facilitaram que os alunos que precisavam de ultrapassar mais obstáculos, contactassem a investigadora em momentos-chave, quando precisavam de não desanimar (César, 2013b, 2017; César & Machado, 2025). Isto constitui uma evidência empírica de como a investigação pode ser intercultural e inclusiva, permitindo que sejam os próprios participantes a gerirem, de forma autónoma, uma parte dos contactos com os investigadores. Daí a importância de incluir *follow-ups* longos, sobretudo na investigação de carácter interventivo, como os projectos de investigação-acção e em alguns estudos de caso, pois permitem: (1) recolher evidências empíricas fundamentais, a médio e longo prazo, para perceber mais aprofundadamente os impactes do processo interventivo; (2) viver o afastamento dos investigadores de forma mais suave, porque alguns contactos, esporádicos, se mantêm, ao longo do tempo; e (3) aumentar a participação legítima daqueles participantes, que continuam a ser ouvidos, quando a mediação do tempo já permite uma reflexão mais aprofundada, que lhes possibilita compreenderem melhor a sua trajectória de participação ao longo da vida e decidir passos futuros.

Para César (2013b, 2017, 2024b) e César e Machado (2024b, 2025), um outro critério fundamental, para que a investigação seja inclusiva, é recorrer a formas de consentimento informado muito mais exigentes do que as habitualmente utilizadas. Na maioria das investigações, aquilo que se designa por consentimento informado limita-se a uma breve informação do que será a investigação e em que consiste a recolha de dados, pedindo-se autorização para usar, posteriormente, os dados recolhidos. No caso dos menores, com investigações realizadas em contexto escolar, geralmente são apenas os encarregados de educação quem assina as autorizações e os próprios nem sequer são ouvidos. Porém, a maioria dos participantes, mesmo adultos, não consegue ter consciência do que vai ser recolhido, antes de ter passado pelas vivências inerentes a esses momentos (questionários, entrevistas, gravações de interacções, em áudio e/ou vídeo). Também não sabem como serão utilizados esses dados, como serão contextualizados a partir do quadro de referência teórico escolhido, ou das interpretações que serão feitas. Por isso, aquilo a que se convencionou chamar consentimento informado resolve um problema legal, aos investigadores. Mas não distribui o poder, nem

garante, aos participantes, que podem agir como participantes legítimos naquela investigação, ou seja, também serem decisores do que nela acontece, nomeadamente em relação à divulgação de dados e interpretações que lhes dizem respeito. Por isso mesmo, esta versão habitual do consentimento (dito) informado é, na realidade, pouco informativa e muito pouco inclusiva.

Para César (2009, 2013a, 2017) e César e Machado (2024b, 2025), o consentimento informado tem de começar por uma autorização inicial, assinada quer pelos encarregados de educação, quer pelo próprio, mesmo que seja menor. Para além disso, estes autores advogam que, antes de qualquer publicação, os participantes cujos excertos são utilizados possam pronunciar-se sobre se autorizam, ou não, que aqueles excertos específicos sejam mencionados, bem como sobre as interpretações que foram elaboradas. Isto significa elevar o consentimento informado a um outro patamar, em que a própria investigação é colaborativa e dialógica, servindo como forma de aprendizagem e desenvolvimento para os próprios investigadores e participantes. É considerar que todos eles são participantes legítimos (César, 2013b; César & Machado, 2024b, 2025; Lave & Wenger, 1991), tendo voz(es) e poder de decisão. Estes processos de escrita colaborativa e dialógica são mais lentos, mas muito ricos, tornando as interpretações mais interculturais e inclusivas. Permitem, aos investigadores e demais participantes, ganhar uma sensibilidade em relação às interpretações, vivências e relações interpessoais que, de outra forma, não seriam desenvolvidas, nem consciencializadas. Assim, a própria investigação pode ser, ou não, uma forma de distribuir poder, uma maneira de contribuir para o empoderamento dos diversos participantes, reforçando a mediação cultural bi-unívoca (César, 2017; César & Machado, 2025).

Interacções sociais e modeladores pessoais de desempenho (MPD)

Muller Mirza e Grossen (2024), assumindo que a psicologia sociocultural do desenvolvimento e da aprendizagem configura o trabalho que realizam, clarificam que "a sua característica central é, segundo Vygotsky (1934/2012), focarmo-nos nas dinâmicas relacionais e sociais em jogo na aprendizagem e no desenvolvimento" (p. 28). Porém, como realçou César (2009, 2013b, 2017,

2024a, 2024b), que também assume esta perspectiva, em todas as dinâmicas relacionais e sociais as questões relacionadas com o poder jogam um papel fundamental. Por isso, é importante compreender como se pode distribuir o poder, para fomentar uma educação intercultural e inclusiva.

Uma das formas de distribuir o poder é utilizar mecanismos de *inter-empowerment*, um constructo cunhado por César (2009). Estes mecanismos podem começar a ser utilizados na família, desde que o bebé nasce, mesmo que os pais, ou outros educadores, nem saibam que eles existem, do ponto de vista conceptual. Quando se estimula um bebé a explorar um brinquedo, o espaço, a aprender a andar, ou a nadar, dando-lhe a sensação de que acreditamos que ele vai conseguir, estamos a usar mecanismos de *inter-empowerment*. Estamos a contribuir para que a criança construa uma auto-estima positiva, a fazê-la acreditar nas suas capacidades e competências, a desenvolver a autonomia. Ao ser exposta, frequentemente, a mecanismos de *inter-empowerment*, a criança vai ser capaz de os internalizar, transformando-os em mecanismos de *intra-empowerment*, que já consegue usar de forma autónoma, noutros contextos, cenários e situações. Incentivamo-la a que seja capaz de experimentar, observar, analisar criticamente, desenvolver-se e aprender. Promove-se a resiliência, a capacidade de enfrentar barreiras e de as ultrapassar, de aprender com os erros, percebendo que eles fazem parte de qualquer percurso de aprendizagem. Uma criança cujos educadores utilizem mecanismos de *inter-empowerment* tem maior probabilidade de construir recursos internos que lhe permitem sentir-se incluída em diversos contextos, cenários e situações.

César (2014) elabora um paralelo entre o que acontece ao conhecimento, segundo Vygotsky (1934/1962) e o que acontece aos mecanismos de *empowerment*. Para Vygotsky (1934/1962), o conhecimento começa por ser social, exterior ao bebé, que o apropria através das interacções sociais. Depois, é internalizado, pelo que passa a ser pessoal, ou seja, foi apropriado por aquela pessoa. Para César (2014), os mecanismos de *inter-empowerment* também são sociais, utilizados em processos interactivos e, depois, são internalizados, transformando-se em mecanismos de *intra-empowerment*, que já são pessoais e, por isso mesmo, podem ser usados de forma autónoma noutros contextos, cenários e situações. Os mecanismos de *inter-empowerment* começam, geralmente, por ser usados por

quem detém o poder (ex: pais, professores, chefias profissionais). Por isso mesmo, constituem uma maneira de o distribuir, de criar interacções sociais onde cada um pode expressar a sua(s) voz(es). Isso torna-os particularmente relevantes para quem, de alguma forma, já vivenciou formas de exclusão.

Os mecanismos de *inter-* e *intra-empowerment* são ferramentas essenciais para delinear uma trajectória de participação ao longo da vida, outro constructo cunhado por César (2009, 2013a), na qual aquela pessoa seja capaz de decidir o que a faz sentir realizada, pessoal, social, escolar e profissionalmente. Como clarifica César (2013a), o constructo de trajectória de participação ao longo da vida expande o conceito de projecto de vida e "desoculta os movimentos que caracterizam o percurso de cada pessoa, em diferentes contextos (como a escola, família, amigos e vizinhos)" (p. 155). Há três dimensões que é importante considerar neste constructo: (1) o tempo; (2) o espaço; e (3) a participação. A trajectória de participação ao longo da vida começa desde o nascimento e só termina quando se morre, ou seja, acontece durante todo o ciclo de vida, o que valoriza a dimensão tempo. Em diversos momentos (dimensão tempo), podem existir pontos de viragem, que mudam o rumo (dimensão espaço) daquela trajectória de participação ao longo da vida. Por isso, as dimensões tempo e espaço estão interligadas. Tanto existem pontos-chave quando se muda de rumo, como quando este se consolida. São momentos em que as decisões tomadas assumem particular importância. Para além disso, a dimensão tempo também existe porque o presente é configurado pela trajectória de participação passada e pelas esperanças e expectativas em relação ao futuro. Como tal, a dimensão tempo tem particular relevância.

Para além disso, cada trajectória de participação ao longo da vida é um percurso, uma trajectória que se vai construindo em diversos contextos, cenários e situações, realçando a dimensão espaço. Os espaços em que uma determinada pessoa se movimenta configuram a sua trajectória de participação ao longo da vida: onde ela vive (casa, bairro, país, entre outros), a escola que frequenta, os espaços onde decorrem os tempos livres, aqueles onde passa as férias, a empresa onde trabalha, entre outros espaços que, geralmente, são relevantes. Existem, ainda, diversas conexões entre a dimensão tempo e a dimensão espaço: há uns espaços mais importantes do que outros, em diferentes fases da vida, ou seja, a

relevância dos espaços muda ao longo do tempo. Estas duas dimensões também se entrecruzam com a participação, pois esta configura a valência afectiva associada a um determinado tempo e espaço. Assim, há espaços e tempos que se associam a acontecimentos agradáveis, outros não. Por isso, há valências emocionais relacionadas com a dimensão tempo, a dimensão espaço e a dimensão participação.

Por último, a participação sublinha a importância de ser agente activo nesse processo, de ter aquilo que Kumpulainen e Lipponen (2010) designam por "*agency*". Quando se age e reage revelando voz(es), fazemo-lo enquanto participantes legítimos (César, 2009; Lave & Wenger, 1991), que têm poder e são respeitados, escutados, que conseguem e podem tomar decisões. Ter a possibilidade de decidir é uma das marcas de poder. Se não se tem voz, nem poder, actua-se como participante periférico, podendo mesmo ser silenciado ou excluído, sentir-se frustrado ou em sofrimento (César, 2009, 2013b, 2014, 2017, 2024a, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b, 2025). Para Ernest (2024), "a dignidade exige o reconhecimento de que todos têm direito a ter voz e que as suas narrativas particulares sobre si, as suas opiniões, desejos e escolhas, são ouvidas e respondidas como provenientes de um igual" (p. 5). Assim, cada ser humano é respeitado enquanto tal, tem o poder de conseguir ser escutado e de decidir aquilo que César (2009, 2013a) designa por trajectória de participação ao longo da vida. Mas, para que exista justiça social, cada participante deve sentir-se e ser escutado como um igual, como alguém com voz(es), que tem o direito de se expressar.

Usando outra terminologia, Freire (2002) também realça a importância de cada um construir uma trajectória de participação ao longo da vida e de o fazer de uma forma consciente e livre:

> Gosto de ser homem, de ser gente, porque sei que a minha passagem pelo mundo não é predeterminada, preestabelecida. Que o meu "destino" não é um dado mas algo que precisa ser feito e de cuja responsabilidade não posso me eximir. Gosto de ser gente porque a História em que me faço com os outros e de cuja feitura tomo parte é um tempo de possibilidades e não de determinismo. Daí que insista tanto na problematização do futuro e recuse sua inexorabilidade. (Freire, 2002, p. 58, aspas no original)

Este excerto realça duas questões importantes: que somos responsáveis pela trajectória de participação ao longo da vida que traçamos; e que, a história de cada um, se faz com os outros. É precisamente porque nos construímos na interacção social, com os outros, que o trabalho colaborativo e dialógico, em que se discutem posições diferentes, por vezes contraditórias, é tão importante. Uma educação crítica, como também defendem Apple (2002), Cobb e Hodge (2007), Nieto (2018) e Skovsmose (2022, 2023), tem de analisar as questões de poder, de identidade e os significados. Para César (2009, 2013a, 2013b, 2024b), precisa também de favorecer a apropriação de conhecimentos e a atribuição de sentidos ao que se aprende. De acordo com Bakhtin (1929/1981), o significado (*meaning*) é social, ou seja, é atribuído socialmente e partilhado pelos membros de uma determinada comunidade, enquanto o sentido (*sense*) é pessoal, pelo que é atribuído de forma individual, por cada pessoa, em função das vivências e interpretações que faz daquilo que aprende. Só quando uma pessoa consegue passar do significado para o sentido, apropria aquele conhecimento, internalizando-o, tornando-o seu, transformando-o numa competência que, segundo Abrantes e suas colaboradoras (1999), é conhecimento-em-acção. Quando isto acontece, aquela pessoa passa a ser capaz de mobilizar essa competência de forma autónoma, noutros contextos, cenários e situações, tanto individualmente, como em interacção com outros, ou seja, atinge um dos principais objectivos da Educação.

César (2014) distingue contexto, de cenário e situação. O contexto é um sistema macro, mais abrangente, pelo que não é facilmente alterável, por uma só pessoa. Cada pessoa participa e desenvolve actividades em diferentes contextos (ex: familiar, escolar, profissional, entre outros). Em cada contexto podem coexistir diferentes cenários, pelo que estes são mais restritos do que os contextos. No contexto escolar, existem vários cenários de sala de aula, pois a mesma turma tem cenários de sala de aula diferentes com cada professor. Outros cenários são a sala de professores, a biblioteca ou os recreios, entre muitos outros. À semelhança do que acontece no teatro, os cenários são decididos e construídos por quem detém, naquele contexto, algum poder, nomeadamente o poder de tomada de decisão. Por isso mesmo, o cenário já pode ser alterado por uma só pessoa, ou por um grupo de pessoas, que nele participam. Por último, em cada cenário, coexistem diferentes situações, pelo que a situação é o nível mais micro que

considerámos. Num cenário de sala de aula pode co-existir uma situação de trabalho em díade, com outras em que os alunos estão a trabalhar individualmente, ou mesmo em pequenos grupos, se os alunos tiverem liberdade para decidir com quem querem trabalhar na resolução de uma determinada tarefa. Nesse mesmo cenário, também podem existir situações em que um aluno, ou um grupo de alunos, interagem com o professor, ou em que um deles está distraído e a ver algo no telemóvel. Por isso, num mesmo cenário podem co-existir muitas situações diferentes. Cada situação é gerida pelos que nela participam, principalmente pelos que agem como participantes legítimos (César, 2009, 2024b; César & Machado, 2025; Lave & Wenger, 1991). Os desempenhos dos alunos são configurados pelos contextos, cenários e situações em que participam e interagem, nomeadamente pela maneira como eles interpretam o que lhes é pedido naquela situação. No que se refere aos desempenhos matemáticos, estes são também influenciados pelas expectativas dos professores, explícitas e implícitas, pelo contrato didáctico, imposto ou negociado com os alunos, e pelo sistema de avaliação, ou seja, pelos processos interactivos e pela maneira como o currículo é operacionalizado.

O conceito de contrato didáctico tem a sua origem na sociolinguística. Rommetveit (1974, 1979) fala de um "contrato comunicativo", que estabelecia uma intersubjectividade entre emissor e receptor, tornando possível a compreensão da mensagem. Brousseau (1988) transpõe o conceito de contrato comunicativo para a Didáctica da Matemática e considera que, o que designa por "contrato didáctico", permite clarificar as formas de actuação que os professores acham legítimas, por parte dos alunos, e as que os alunos esperam, da parte dos professores. Neste significado, Vergnaud (1981) considera que "a noção de contrato didáctico não é uma noção meramente social, ela implica directamente o conteúdo dos conhecimentos" (p. 227), ou seja, como explicitam Schubauer-Leoni e Perret-Clermont (1997), é a situação escolar e os constrangimentos específicos que esta comporta, que o transformam num contrato didáctico. Schubauer-Leoni (1986) salienta também a existência de um meta-contrato didáctico, que rege as regras do próprio sistema de ensino (ex: escalas em que os alunos são avaliados, em cada ano de escolaridade), bem como as regras gerais do funcionamento das escolas. Schubauer-Leoni e Grossen (1993) focam, ainda, a existência do

"contrato experimental", vigente quando se faz investigação e que, também ele, rege as relações estabelecidas entre os investigadores e os outros participantes.

Schubauer-Leoni (1986) realça que o contrato didáctico serve para regular as expectativas mútuas de alunos e professores. Por isso mesmo, estabelece-se entre os vários participantes de uma situação de aprendizagem e define as regras, na sua maioria implícitas, pelas quais eles se regem. Como muitas das regras são implícitas, esta autora fala da existência de "uma adesão silenciosa" (p. 141). Para César (1994), "o contrato didáctico permite legitimar, de uma forma subtil, o modo como os diversos parceiros se comportam" (p. 141). Assim, o contrato didáctico liga os três polos de qualquer relação didáctica: o professor, o aluno e o saber. O saber é visto como indissociável de quem o ensina e o aprende, ou seja, dos participantes numa determinada situação de aprendizagem e dos processos interactivos que a caracterizam.

O contrato didáctico chamou a atenção dos investigadores para as questões relacionais, indo para além dos aspectos cognitivos que, até então, eram aqueles que costumavam ser estudados. Realça, ainda, que existe uma relação de poder, com os outros e o saber, pois há quem defina "o que" e "como" se vai aprender, e quem não tenha esse poder. Como afirma César (2009, 2013a), quando se pretende estabelecer um contrato didáctico diferente do habitual, inovador, é necessário explicitar alguma das regras que se propõem. Como se trata de regras diferentes das que os alunos já conhecem, se elas não forem explicitadas, eles não as conseguem identificar e, por isso mesmo, não lhes conseguem aderir. Ao serem diferentes, podem suscitar, inicialmente, algumas dificuldades de adesão, mesmo quando lhes agradam, por não serem habituais nas vivências dos alunos. Daí a importância de os professores também trabalharem, cuidadosamente, os implícitos, sobretudo durante as primeiras semanas de aulas, como ilustram diversos exemplos (César, 2009, 2014, 2017, 2024b; César et al., 2014; César & Machado, 2024a, 2024b, 2025).

Borba, Lima e Cavalcanti (2024) salientam o carácter dinâmico do contrato didáctico, que descrevem como "único e instável", uma vez que este evolui em função do saber a que se refere, mas também do próprio processo interactivo entre os participantes naquela situação de aprendizagem, ou seja, como eles

abordam esse mesmo saber, como se relacionam com ele, como o modificam, ao apropriarem-se dele e ao atribuírem-lhes sentidos.

> O Contrato Didático nasce no bojo da relação didática e esta sintetiza uma série de relações sociais que se revelam no espaço sociotemporal e na ecologia da sala de aula, que envolve um professor, seus alunos e um objeto de saber. Todo contrato, segundo **Brousseau (1996)**, é único e instável, uma vez que os saberes envolvidos na relação didática não são apenas aqueles que o professor quer que o aluno aprenda e que foram retirados dos referenciais curriculares, das produções científicas e dos livros didáticos. Há muito mais envolvido quando um professor e seus alunos se debruçam sobre um conteúdo (objeto de um saber, no caso, a Matemática), pois nenhum conhecimento que acontece em sala de aula é exatamente igual ao que foi criado na sua origem. (Borba et al., 2024, s/p., maiúsculas e negrito no original)

Nos contratos didácticos que valorizam as interacções sociais, nomeadamente entre pares, na promoção das aprendizagens e do desenvolvimento dos alunos, é importante clarificar a que modalidades de trabalho nos referimos. César (2003, 2009, 2013a, 2013b), Machado (2014), McInnerney e Roberts (2004) e Ventura (2012) analisam, do ponto de vista conceptual, o que distingue o trabalho cooperativo (Slavin, 1990, 1999) do trabalho colaborativo (Panitz, 1999). Num primeiro estudo (César, 1994), o quadro de referência teórico utilizado referia-se ao trabalho cooperativo. Porém, posteriormente, no projecto IC, assumiu-se o trabalho colaborativo e dialógico como aquele que mais favorecia o empoderamento, a autonomia, o sentido crítico, o desenvolvimento e as aprendizagens dos alunos. Ventura e seus colaboradores (2013) justificam esta opção teórica por motivos epistemológicos e pelo que se pretende desenvolver com o trabalho colaborativo.

> César (2003, 2009, 2013a, 2013b, in press a) distancia o trabalho colaborativo, enquanto forma de trabalho que pretende estimular a auto-responsabilização, a capacidade de organização pessoal, o desenvolvimento de mecanismos de auto-regulação da motivação, ou a autonomia, do trabalho cooperativo, que assenta em esquemas avaliativos directos e de reforço, que podem contribuir para o

> desenvolvimento de formas de dependência em relação a quem detém o poder, ou a quem é visto como par mais competente. Nesta distinção é também salientado que os princípios epistemológicos do trabalho colaborativo se situam numa abordagem histórico-cultural, construtivista e interaccionista, enquanto os do trabalho cooperativo se baseiam no *neo-behaviourismo* e que isso mesmo está patente nas formas de organização das práticas, quando se assume cada uma destas formas de trabalho, em aula ou noutros cenários, educacionais, profissionais ou de outro tipo. (Ventura et al., 2013, p. 56, itálicos no original)

Panitz (1999) define a cooperação como uma interacção social estruturada, em que um grupo de alunos procura atingir um determinado objectivo comum, previamente estabelecido pelo professor. Considera que o ensino cooperativo se baseia na "teoria da inter-dependência social, teoria do desenvolvimento cognitivo e teoria da aprendizagem behaviourista" (Panitz, 1999, p. 7). Num cenário de sala de aula, em que se utilize o trabalho cooperativo, o professor detém grande parte do controlo: é ele que propõe as tarefas, a maneira de as resolver, bem como o papel que cada aluno desempenha naquele grupo e durante quanto tempo o faz. Por isso, é uma modalidade de trabalho bastante estruturada, sujeita a um conjunto de regras rígidas, que os alunos devem respeitar. Johnson e Johnson (2010) consideram que o trabalho cooperativo permite maximizar as aprendizagens. Para isso, recomendam que as tarefas se dividam em etapas, cada uma delas realizada por um aluno do grupo. Assim, o trabalho final (todo) é a soma de todas as partes, cada uma delas elaborada por um aluno, individualmente. Por isso, o processo interactivo pode ser pobre e pouco frequente, pois cada um está a resolver, individualmente, a etapa que lhe foi atribuída. Staples (2007), quando contrapõe o trabalho cooperativo e o colaborativo, salienta que, no ensino cooperativo, "os estudantes podem cooperar para resolver uma tarefa, partilhando respostas, ou criar, em conjunto, um *poster* ou outro produto, mas não se envolvem em colaboração, em relação à produção conjunta de ideias matemáticas" (p. 163, itálico acrescentado na tradução). Convém realçar que, para Staples (2007), é a aprendizagem colaborativa que leva os alunos a realizarem aprendizagens com significado, pelo que é esta forma de trabalho que prefere, em aula.

Machado (2014) clarifica as razões que levaram a equipa do projecto IC a assumir o trabalho colaborativo e dialógico:

> Este é um dos aspetos que nos fazem distanciar do ensino cooperativo: a noção de que trabalhar em grupo é dividir tarefas, cada um fazer a sua parte e, sem discussão prévia e consensos sobre o que foi feito, juntar as várias partes e obter um produto final. Como assumimos uma perspetiva vygotskiana da aprendizagem, influenciada pela *gestalt*, o todo é mais do que a simples soma das partes. Mas, sobretudo, a riqueza do trabalho em grupo advém das interações dialógicas que se estabeleçam, o que não é considerado quando se dividem tarefas para cada um fazer, individualmente, a sua parte. Por isso, consideramos que, neste caso, o que obtemos é uma soma de trabalhos individuais, mas não é um trabalho de equipa, nem os alunos trabalham na sua zona de desenvolvimento proximal (ZDP), aspeto que Vygotsky (1934/1962) considera ser essencial para promover o desenvolvimento. (Machado, 2014, p. 39, maiúsculas e itálico no original)

Para Panitz (1999), o trabalho colaborativo é uma filosofia de vida, que rege a forma de interagir com os outros, não só nas aulas, mas na vida, em geral. É muito menos estruturado que o trabalho cooperativo, dando mais autonomia aos alunos e apostando mais na criatividade. Por isso, o professor deixa de ter um papel de autoridade máxima, optando por distribuir o poder, como sublinha César (2009, 2013b, 2017). A definição de trabalho colaborativo de Panitz (1999) refere que esta modalidade de trabalho respeita as características individuais de cada aluno, algo que César (2009, 2013a, 2013b, 2014, 2024b) considera essencial para promover uma educação intercultural e inclusiva. Para ele, o trabalho colaborativo é mais do que uma mera técnica, o que também o distingue do trabalho cooperativo, que tem esquemas de actuação mais rígidos (ex: *jigsaw*).

> [A aprendizagem colaborativa] sugere um modo de lidar com as pessoas que respeita e evidencia os contributos individuais de cada elemento do grupo. Há uma partilha de autoridade e uma aceitação da responsabilidade por parte dos elementos do grupo sobre as acções do grupo. A premissa subjacente à aprendizagem colaborativa é o consenso. (Panitz, 1999, p. 3)

Assim, tal como referem César (2009, 2013a, 2013b, 2014) e César e seus colaboradores (2014), para Panitz (1999) o professor supervisiona discretamente o trabalho desenvolvido pelos grupos, que tomam decisões e se responsabilizam por esse mesmo trabalho. Quando isso é necessário, o professor pode desafiar os alunos a expandirem as argumentações ou a explicitarem mais as estratégias de resolução. Pode fazê-lo recorrendo a questões ou sugestões, que também podem contribuir para esclarecer dúvidas. Como afirma Ventura (2012), "age como mediador entre as culturas, vivências, conhecimentos, capacidades e competências anteriores dos alunos, e os conhecimentos e competências que se pretende que os alunos apropriem e/ou desenvolvam" (p. 63).

O Cooperative Learning Center, da Universidade de Minnesota (2009), corrobora o que foi referido por Panitz (1999). Para eles, "cooperar é trabalhar em conjunto para atingir objectivos partilhados" (s/página), sendo este trabalho sujeito a instruções rigorosas e a uma distribuição de actividades a desenvolver, decidida pelo professor, de modo a optimizar a aprendizagem de cada aluno. O trabalho cooperativo baseia-se no trabalho de grupo, mas os alunos desempenham papéis atribuídos pelo professor, os grupos estão organizados de forma hierarquizada e são os responsáveis (ex: professor, director, investigador, chefia) quem toma as decisões sobre essa mesma organização estruturada e rigorosa. Deste modo, treina mais a submissão e obediência, do que a autonomia. Todos os grupos seguem um mesmo padrão de organização e de instruções de resolução das tarefas, independentemente das características e necessidades dos alunos. Assim, implícita e explicitamente, não acreditam que os alunos, de forma autónoma, consigam organizar-se, resolver as tarefas e promover as suas aprendizagens e desenvolvimento, nem que possam necessitar de maneiras diferentes de aprender, de acordo com as suas capacidades e competências, necessidades e interesses, nem têm em consideração questões relacionadas com as diferentes culturas.

Slavin (1980) salienta um outro aspecto que diferencia estas duas formas de trabalho: no trabalho cooperativo, existe um esquema de reforços, que desempenha um papel fundamental na motivação dos alunos. Como tal, esta forma de trabalho desenvolve a motivação externa (reforços, recompensas), enquanto o trabalho colaborativo, como afirma César (2003, 2009), pretende desenvolver a auto-responsabilização e a motivação interna. O recurso a esquemas de reforços

mostra, de forma nítida, as origens epistemológicas do trabalho cooperativo: o *behaviourismo*. Daí as instruções de trabalho rígidas, pois acredita-se que existem formas óptimas de todos aprenderem, ignorando a diversidade, nomeadamente a diversidade cultural (César, 2009, 2013a). Ao recorrer a um esquema de reforços externos, decididos pelo professor, o trabalho cooperativo corre o risco de gerar dependência desses reforços e dessa pessoa, para além de promover a competitividade, mesmo dentro de cada grupo. Isto também o distingue do trabalho colaborativo, cujos princípios epistemológicos se relacionam com uma abordagem histórico-cultural (Vygotsky, 1932/1978), de aprendizagem situada (Lave & Wenger, 1991). O trabalho colaborativo pretende fomentar a autonomia, o sentido crítico e a colaboração entre os elementos de cada grupo, ou do grupo turma, como forma de promover as aprendizagens e o desenvolvimento.

Quando existem relações hierárquicas, por exemplo entre professores e alunos, é importante distribuir o poder, algo que o trabalho colaborativo fomenta, sobretudo se aquela escola também utilizar a mediação cultural bi-unívoca (César, 2013b, 2017; César & Machado, 2024a, 2025). Abreu e Elbers (2005), César e Kumpulainen (2009), Ligorio e César (2013), Marsico, Komatsu e Iannaccone (2013) ou Perret-Clermont, Pontecorvo, Resnick, Zittoun e Burge (2004) são alguns dos muitos autores que salientam que, se as relações hierárquicas distribuírem o poder e fomentarem interacções sociais dialógicas (Renshaw, 2004), pode realizar-se trabalho colaborativo. Mesmo entre alunos, como salientam César (1994, 2009) e César e seus colaboradores (2014), as relações também são, por vezes, hierárquicas, sendo essa hierarquia estabelecida com base no estatuto dos alunos, na sua capacidade sócio-económica, ou na popularidade, junto dos pares. Por isso, mesmo relações entre pares não são isentas de questões relacionadas com o poder e as formas de participação, o que sublinha a necessidade de analisar muito seriamente estas questões e o papel que desempenham, em aula, bem como na escola, em geral. Por isso mesmo, no trabalho colaborativo e dialógico é importante garantir a coerência entre os discursos e as práticas, o que implica uma reflexão aprofundada sobre essas mesmas práticas (Machado, 2014; Ventura, 2012).

Machado (2014) sintetiza os aspectos que afastam o ensino cooperativo da aprendizagem colaborativa, clarificando mais detalhadamente aquilo que levou o projecto IC a optar pelo trabalho colaborativo e dialógico.

> Um outro ponto de discórdia é o protagonismo dado aos processos de ensino em detrimento dos processos de aprendizagem, ou seja, o papel central atribuído ao professor – ou ao experimentador –que é quem detém o poder e a capacidade de decisão sobre as tarefas e como estas devem ser divididas e executadas, enquanto o papel dos alunos – ou sujeitos – é minimizado, não existindo uma distribuição de poder, nem uma ênfase nos processos de tomada de decisão dos alunos e de *empowerment* (César, 1994, 2013a, 2013b, in press b; Courela, 2007; Panitz, 1999). Desta forma, a(s) voz(es) (Werstch, 1991) dos alunos são (mais) silenciadas, contribuindo para a existência de formas subtis de exclusão social e escolar, bem como para a existência de uma participação periférica e não legítima dos alunos (César, 2007, 2013a; Lave & Wenger, 1991). (Machado, 2014, p. 39, itálico no original)

O trabalho cooperativo não permitia distribuir o poder, favorecer o empoderamento dos alunos, nem desenvolver a sua capacidade de tomada de decisão ou o sentido crítico, pontos cruciais para a equipa do projecto IC, para fomentar a autonomia dos alunos. César (2009, 2013a, 2013b, 2024b), César e seus colaboradores (2014) e César e Machado (2024a, 2024b, 2025) realçam como os implícitos empoderadores dos alunos são essenciais para promover uma educação intercultural e inclusiva, sobretudo para alunos que foram confrontados com insucesso académico cumulativo e diversas formas de exclusão, como as que descrevem em relação a alunos de culturas vulneráveis, socioculturalmente desvalorizadas. Para estes, que eram confrontados com baixas expectativas em relação aos seus desempenhos académicos, nomeadamente em Matemática, um contrato didáctico que aceitasse as suas formas naturais de raciocinar e estratégias de resolução era fundamental.

Machado (2014), baseando-se em McInnerney e Roberts (2004), salienta as quatro características que tornam o trabalho colaborativo tão poderoso e que levou o projecto IC a assumi-lo como forma preferencial de trabalho, em aula e na investigação: (1) partilhar o conhecimento entre o professor e os alunos; (2)

distribuição do poder; (3) aprender a aprender; e (4) formação de grupos heterogéneos, com capacidades e competências complementares, respeitando e valorizando as diferenças.

> McInnerney e Roberts (2004) também apontam quatro características que envolvem situações de colaboração, desenvolvidas em contextos de educação formal, nomeadamente em aula: (1) conhecimento partilhado entre professor e alunos, no qual os alunos, mediados pelo professor, partilham experiências e conhecimentos que apropriaram anteriormente, constituindo-se como suporte para a construção de outros conhecimentos; (2) distribuição da autoridade entre professor e alunos, que passa pela partilha de um conjunto de metas a atingir, num determinado conteúdo programático, permitindo aos alunos atingi-las; (3) o professor atua como mediador, incentivando os alunos a aprender a aprender, o que é considerado por estes autores como o aspeto-chave da aprendizagem colaborativa; e (4) existência de grupos de alunos heterogéneos de maneira a que haja respeito por todas as contribuições feitas pelos alunos. (Machado, 2014, p. 44)

A estes aspectos acrescentaríamos a importância dos implícitos, nomeadamente durante a primeira semana de aulas (César, 2009, 2017, 2024b; César et al., 2014; César & Machado, 2024a, 2024b, 2025). Sobretudo para os alunos que participam em culturas vulneráveis e que vivenciaram insucesso académico cumulativo, as mensagens implícitas têm impactes enormes. Um professor que passe a mensagem implícita de que todos conseguem fazer e aprender Matemática, mas que o faça através das práticas, permite que as diversas vozes do *dialogical self* destes alunos se expressem, algo fundamental para que eles se sintam valorizados e que vale a pena tentar aprender Matemática. Uma abordagem dialógica do desenvolvimento e da aprendizagem tem em consideração os diversos contextos, a polifonia de vozes (Bakhtin, 1929/1981) e os conflitos, internos e externos, que daí podem emergir. Como sublinham Zittoun e Grossen (2024), "uma abordagem dialógica destaca, então, a relação entre a sala de aula e as suas interações como diálogos relacionados com outras interações, situações e entidades sociais." (p. 84). Este excerto relembra-nos de como é importante que estes diversos diálogos sejam respeitados e valorizados, em aula, nomeadamente através da celebração das diversas culturas e das suas formas de fazer e aprender

Matemática. Uma explicitação mais detalhada da abordagem dialógica permite também relacioná-la com a dimensão tempo: como os discursos anteriores e futuros podem configurar as diferentes vozes; como os que não estão presentes, naquele momento, podem, mesmo assim, influenciar as interpretações e os desempenhos, numa determinada tarefa.

> A abordagem dialógica em psicologia foi inspirada no trabalho de Bakhtin (1981, 1984), que se foca na natureza dialógica da linguagem, nomeadamente através da literatura, e mostra como o discurso é feito de uma pluralidade de "vozes", como essas vozes ecoam outro discurso relacionado com diferentes situações sociais, tanto em conteúdo (como quando cita palavras de outros), quanto em géneros (*genres*) de discurso, e como todo o discurso pode ser visto como uma resposta a um discurso anterior e uma antecipação de outro discurso. (Zittoun & Grossen, 2024, p. 84, aspas no original, itálico acrescentado na tradução)

Na abordagem dialógica do desenvolvimento e da aprendizagem é também importante considerar a teoria do *dialogical self* (*dialogical self theory* – DST), cunhada por Hermans (1991, 1996, 2001, 2003). Esta teoria começou por ser uma teoria clínica, usada em psicoterapia. Porém, alguns psicólogos, relacionados também com a Educação, viram as potencialidades de a utilizar neste domínio (César, 2003, 2009, 2013a), tendo-lhe dedicado um livro que relacionava a aprendizagem dialógica com o *dialogical self* (Ligorio & César, 2013). Posteriormente, Meijers e Hermans (2018a) também publicaram um livro que analisa criticamente a utilização da teoria do *dialogical self* na Educação. Como, no início do projecto IC, ainda não tínhamos contactado com esta teoria, as primeiras interpretações que fizemos não a consideram (César, 2000, 2001). Porém, quando a teoria do *dialogical self* passou a fazer parte do quadro de referência teórico deste projecto (César, 2003, 2009), as interpretações tornaram-se mais ricas e aprofundadas, sendo capazes de iluminar outros aspectos significativos das reflexões dos participantes, das suas trajectórias de participação ao longo da vida e dos processos interactivos, em aula (César, 2013a, 2013b, 2017, 2024b; César & Machado, 2025). Assim, o recurso à teoria do *dialogical self* constitui

uma das transições teóricas que se podem observar no projecto IC (Ventura, 2012; Ventura et al., 2013) e que tornaram o seu quadro de referência teórico mais sólido, possibilitando que se explicasse de forma mais completa o que se observava nas práticas e durante o *follow-up*.

Tal como Hermans (1991, 2001, 2003), concebemos o *self* como dialógico, com múltiplas vozes (*multivoiced*), constituído por diversas posições identitárias, nomeadamente: (1) *I-positions* (ex: filho/a, aluno/a, pais, marido/esposa, profissional, amigo/a, entre outras); e (2) *Me-positions* (como os outros me vêem e como eu acho que eles me vêem). Para Hermans (1996), o "I" representa o *self* enquanto conhecedor (*self-as-knower*) e o "Me" representa o *self* enquanto conhecido (*self-as-known*). Meijers e Hermans (2018b) sublinham o carácter dinâmico e flexível das *I-positions*, que podem mesmo dar origem a outras *I-positions*, destinadas a diminuir conflitos, que sejam sentidos como demasiado dolorosos.

> As *I-positions* não são entidades isoladas, fixadas em algum lugar, no espaço do *self*. Em vez disso, elas interagem entre si e podem formar novas combinações, que são mais do que a soma dos seus componentes. No caso de duas posições conflitantes, pode surgir uma terceira, que mitigue, sob certas condições, o conflito entre as originais. (Meijers & Hermans, 2018b, p. 11, itálico acrescentado na tradução)

Meijers e Hermans (2018b) alertam para a distinção entre *I-positions* e meta-posições, que permitem ter uma visão global e inter-situacional.

> A teoria do *dialogical self* faz uma distinção entre *I-positions*, que são evocadas em situações específicas e meta-posições, que permitem uma visão geral, inter-situacional, de posições específicas. Tal como os comités ou provedores de justiça, na sociedade, que têm a tarefa de criar uma visão geral e uma perspectiva de longo prazo, no caso de problemas urgentes, as meta-posições fazem um trabalho semelhante no *self*. (Meijers & Hermans, 2018b, p. 10, itálico acrescentado na tradução)

Hermans e Kempen (1998), ao conceberem o *self* como dialógico, ou seja, dialéctico e não-binário, alertam-nos para o perigo das dicotomias, especialmente numa sociedade mais globalizada, onde pessoas que participam em culturas muito diferentes interagem entre si. Assim, evitam noções dicotómicas como bom e mau, certo e errado, positivo e negativo, algo que também assumimos no projecto IC. César (2013a) considera que, na maioria das situações e das relações interpessoais, co-existem diversas gradações de sentimentos e interpretações, pelo que estas dicotomias se revelam enganadoras, para as descrever e compreender. Na mesma situação ou relação podem co-existir aspectos positivos, neutros, negativos, com gradações diferentes, em momentos diferentes. Daí que compreender o *self* a partir de dicotomias seja negar a complexidade dos seres humanos e das suas formas de sentir, agir e reagir, não possibilitando o acesso à diversidade, que caracteriza cada ser humano, cultura e processo interactivo.

Assumir o *self* como dialógico e com múltiplas vozes, é também considerá-lo histórico e culturalmente situado (Hermans, 2001). As diferentes vozes podem manifestar-se simultaneamente, o que pode gerar alguns conflitos internos e/ou externos. Mas também podem manifestar-se em momentos distintos (dimensão tempo) ou em diferentes contextos, cenários e situações (dimensão espaço). Por isso mesmo, o *dialogical self* é situado no tempo e no espaço, o que ilustra a sua flexibilidade e complexidade. Meijers e Hermans (2018b) consideram que "a manifestação dinâmico-espacial da *I-position* é expressa pelo processo de posicionamento e contraposicionamento. A sua manifestação dinâmico-temporal reflete-se no processo de posicionamento e reposicionamento." (p. 9, itálico acrescentado na tradução). Como realça Hermans (2008), "as vozes comportam-se como personagens interactivas de uma história, envolvidas num processo de perguntas e respostas, acordos e desacordos. Cada uma delas tem uma história para contar sobre as suas próprias experiências a partir da sua própria perspectiva." (p. 188). Assim, a sua conceptualização do *dialogical self* é influenciada pelo conceito de polifonia, cunhado por Bakhtin (1929/1981). Ventura e seus colaboradores (2013) salientam que esta polifonia inclui as diferentes vozes, assumidas por cada *I-position*, bem como pelos diálogos entre as diferentes posições identitárias, o que realça o carácter social do *self*.

> A existência e a dialogicidade das diferentes posições identitárias é realçada por Hermans (2001) quando refere que "O *I* na posição um pode, para além disso, concordar, discordar, compreender, não compreender, opor-se, contradizer, questionar, desafiar e até ridicularizar o *I* noutra posição" (p. 249, itálico no original). Cada posição identitária que o *self* assume é dotada de uma, ou mais, vozes internas, através das quais interage com as restantes posições identitárias. Esta dimensão social do *self* ilumina a importância das diferentes culturas em que participamos para a emergência das diversas arquitecturas do *dialogical self*, bem como da forma como estabelecemos transições entre estas culturas e o modo como gerimos os conflitos entre as diferentes posições identitárias que assumimos. (Ventura et al., 2013, p. 53, itálicos no original)

Meijers e Hermans (2018b) também salientam o carácter dinâmico e social do *dialogical self*, descrevendo-o como uma paisagem, onde diversas *I-positions* se movem, assumindo relações dialógicas entre si. Estas relações entre diferentes posições identitárias criam o que estes autores designam como uma "sociedade da mente".

> Na forma mais sucinta, o *dialogical self* pode ser definido como uma multiplicidade dinâmica de *I-positions* na sociedade da mente. Como construção espacial, o *self* pode ser representado como uma paisagem na qual uma multiplicidade de posições se move. Ao mesmo tempo, a mente funciona como uma paisagem sonora, porque as *I-positions* podem assumir uma voz que permite o surgimento de relações dialógicas entre posições. Supõe-se que as relações dialógicas dentro desta multiplicidade de *I-positions* funcionem como uma 'sociedade da mente', que faz parte da sociedade em geral (para uma exposição extensa da DST, ver Hermans & Gieser, 2012; Hermans & Hermans-Konopka, 2010). (Meijers & Hermans, 2018b, p. 7, aspas no original e itálicos acrescentados na tradução)

O *dialogical self* é um *work-in-progress*, ou seja, está, durante toda a vida, a ser construído e configurado pelas diferentes vivências daquela pessoa, incluindo as interacções sociais que estabelece. Valsiner (2005) considerava o *dialogical self* como algo dinâmico, em mudança: "Dentro da teoria do *dialogical self*,

o funcionamento psicológico humano é explicado por transformações de *I-positions* em constante mudança, que são mapeadas tanto estruturalmente (interno/externo) quanto temporalmente (passado/presente/futuro)" (p. 197, itálicos acrescentados na tradução). Hermans (2008) salienta que "um *self* dialógico só pode existir na suposição de que a outra pessoa não é puramente externa, mas simultaneamente parte do *self* e até mesmo constitutiva dele" (p. 186, itálico acrescentado na tradução), realçando que "o *self* dialógico só pode ser adequadamente compreendido quando o intercâmbio social e a intersubjetividade são considerados intrínsecos à sua natureza" (Hermans, 2008, pp. 186-187, itálico acrescentado na tradução).

Hermans (2001, 2003) considera que, em diferentes momentos, estas posições identitárias organizam-se em arquitecturas diferentes, ou seja, umas são dominantes nuns momentos, outras são-no noutros. Por exemplo, se um aluno/a está concentrado nas tarefas, em aula, a *I-position* dominante é a de aluno/a. Mas, se se distrai, pode tornar-se dominante a *I-position* como amigo/a, namorado/a, desportista, filho/a, ou outra, consoante aquilo que o fez distrair e em que está a pensar, ou a sentir. Por vezes, existem conflitos entre as diferentes *I-positions* (ex: apetece-lhe ir falar com os amigos, no recreio, mas tem de resolver tarefas matemáticas, na aula). Estes conflitos são mais agudos quando as pessoas vivem em contextos que têm valores, regras e formas de actuação muito diferentes, como acontece em relação a alguns alunos cujas culturas são pouco valorizadas nas escolas e que, elas próprias, também valorizam pouco a educação formal (César, 2013b, 2017, 2024a, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b). Se estes conflitos se tornarem insuportáveis, pelo sofrimento que causam, podem manifestar-se doenças mentais, ou o aluno pode optar por abandonar a escola precocemente.

Se as práticas, em aula, distribuírem o poder, favorecendo a equidade (Secada, 1995), bem como o respeito por todas as culturas, isso facilita que, em contexto escolar, os conflitos entre as diferentes *I-positions* se mantenham em níveis de sofrimento suportáveis, favorecendo as trajectórias de participação ao longo da vida que incluem percursos escolares mais longos e um maior investimento na realização pessoal e profissional. Para além disso, César (2013a)

clarifica as relações existentes entre o *dialogical self* e as trajectórias de participação ao longo da vida.

> Conectando o construto de trajectórias de participação ao longo da vida com a teoria do *dialogical self*, afirmamos que a aprendizagem corresponde a trajectórias do *self* – de identidades – desenvolvidas em contextos sociais específicos. Aprender é um empreendimento muito mais complexo do que um simples acumular de conhecimentos, no que diz respeito a aprender a participar em diferentes culturas, contextos, cenários e situações, percebendo quem somos e quem poderemos vir a ser. Isso significa que concebemos o *self* como dinâmico, dialético e socialmente construído, através de processos interactivos dialógicos. Esses processos são configurados – e configuram – trajectórias de participação. Concebemos o *self* como manifestando-se através de múltiplas vozes e dialógico, aceitando a sua natureza não-dualista (Hermans, 2003), assumindo-o como complexo, configurado pelas experiências e culturas dos indivíduos, definindo trajectórias de participação ao longo da vida. (César, 2013a, pp. 156-157, itálicos acrescentados na tradução)

Hermans (1999) considerava "uma pessoa como um contador de histórias motivado" (p. 1193). César (2013a) salienta que "esta narrativa é configurada – mas também configura – as experiências, o conhecimento e o desenvolvimento dos indivíduos, assumindo uma natureza subjectiva, dialéctica e dinâmica." (p. 159). Uma trajectória de participação ao longo da vida é uma narrativa única e irrepetível, construída dialogicamente, através de reflexões e interacções sociais, com os outros, de formas colaborativas, ou não, de interacção e participação. A aprendizagem é favorecida pela partilha das histórias de cada aluno, que incluem as suas formas naturais de raciocinar, de resolver problemas, de interpretar as situações e as vivências. Por isso, formas dialógicas e colaborativas de aprender, nomeadamente Matemática, facilitam o acesso ao sucesso académico, a equidade e a justiça social, porque todos e cada um são valorizados. Como ilustram diversos autores (César, 2009, 2013a, 2017, 2024b; César & Machado, 2025; Kumpulainen & Lipponen, 2010; Ligorio & César, 2013; Renshaw, 2004), há uma interconexão entre o *dialogical self* e a aprendizagem colaborativa e dialógica.

Meijers e Hermans (2018b), ao elaborarem uma discussão em que relacionam aprendizagem e desenvolvimento, consideram que, para as aprendizagens promoverem o desenvolvimento pessoal, precisam de ser relevantes para os alunos, ou seja, serem orientadas para o significado. O que escrevem relaciona-se com Freire (2002), quando este se manifesta contra o que designa por "educação bancária". César (2009, 2013a), retomando Bakhtin (1929/1981), distingue entre significado (social) e sentido (pessoal), considerando que é importante que os alunos internalizem as aprendizagens atribuindo-lhes sentidos.

> A aprendizagem para o desenvolvimento pessoal, em comparação, não se concentra na reprodução do conhecimento, mas na transformação e integração da informação de forma relevante para o aluno. Esta forma de aprendizagem – também referida como aprendizagem orientada para o significado – não pressupõe um comércio entre conhecimento e ordem (onde os alunos são principalmente consumidores), mas uma cooperação activa (co-construção) entre alunos e professores. A aprendizagem orientada para o significado, portanto, requer rotinas de aprendizagem completamente diferentes para todos os envolvidos das que usa a aprendizagem reprodutiva. (Meijers & Hermans, 2018b, p. 3)

Hermans (2001) considera a cultura como *self-inclusive* e o *self* como *culture-inclusive*. Os movimentos migratórios acentuados, bem como a globalização e digitalização, que caracterizam o séc. XXI, levaram Meijers e Hermans (2018b) a sublinharem os impactes que emergem da participação em diversas culturas, que consideram criar uma maior densidade de *I-positions*. Como César (2013a, 2013b, 2017, 2024b) e César e Machado (2024b) também salientam, isso cria conflitos, oposições e causa, por vezes, sofrimento. Meijers e Hermans (2018b) sublinham a "variedade e velocidade das mudanças" como algo que cria desafios intensos ao *self*, que precisa de se reorganizar em função dos choques culturais com que contacta, nomeadamente através do acesso a informação de outros países e culturas, em tempo real.

> Quando as pessoas atravessam as fronteiras de diferentes culturas e países e lá chegam numa variedade de situações, o *self* é confrontado com uma densidade sem precedentes de *I-positions*. Embora participe cada vez mais em diferentes

> grupos e culturas locais, o repertório de posições individuais torna-se heterogéneo e complexamente organizado, carregado de diferenças, tensões, oposições e contradições. Como consequência da variedade e velocidade das mudanças situacionais, o repertório recebe mais "visitas" de posições inesperadas e há mais e maiores "saltos de posição" no *self*: o indivíduo tem que dar mais e maiores "saltos mentais" resultantes de contactos educativos internacionais, imigração, turismo, contactos nas redes sociais ou da vida na diáspora. (Meijers & Hermans, 2018b, p. 9, aspas no original e itálicos acrescentados na tradução)

Isso também os levou a expandirem a teoria do *dialogical self*, realçando a importância das posições promotoras (Valsiner, 2004), que consideram essenciais para a integridade do *self*, num mundo em mudança, como o actual. Meijers e Hermans (2018b) salientam que "as posições promotoras (inicialmente propostas por Valsiner, 2004) estabelecem-se não só no domínio externo, mas também no domínio interno do *self*." (p. 12, itálico acrescentado na tradução). Clarificando o papel destas posições identitárias, esclarecem as suas principais características: são bússolas; geram novas posições, desenvolvendo o *self*; integram posições identitárias novas, sendo adaptativas; contribuem para que as diferentes posições identitárias possam ser ouvidas; e garantem a continuidade do *self*, mas também permitem descontinuidade, essencial para o desenvolvimento do *self*.

> As posições promotoras têm algumas características predominantes: (a) organizam e orientam uma diversidade de *I-positions* mais especializadas que, de outra forma, seguiriam o seu próprio caminho, de forma isolada em relação a outras posições; têm uma "função de bússola" para o auto-sistema, como um todo; (b) têm uma abertura considerável para o futuro e têm potencial para gerar novas posições, que sejam relevantes para o desenvolvimento futuro do *self*; (c) integram uma diversidade de posições novas e outras já existentes no *self*; "integração" é utilizada no sentido em que diferentes posições são reunidas para formar combinações e coligações adaptativas; (d) se forem suficientemente dialógicas, têm o potencial de contribuir para a organização democrática do *self*; "democrático" no sentido de que um promotor que funciona bem dá voz a outras posições para que possam ser ouvidas; e (e) funcionam como 'guardas' da continuidade

> do *self*, mas, ao mesmo tempo, dão espaço para a descontinuidade. (Meijers & Hermans, 2018b, p. 12, aspas no original e itálicos acrescentados na tradução)

Numa síntese que procura clarificar os desafios trazidos pela globalização e crescente participação em múltiplas culturas, Meijers e Hermans (2018b) afirmam: "Resumindo: terceiras posições, meta-posições e posições promotoras representam movimentos de centralização do *self*. Criam um equilíbrio no *self* que, de outra forma, poderia estar sujeito a fortes movimentos de descentralização, numa sociedade pós-moderna, que ultrapassa fronteiras" (p. 13, itálicos acrescentados na tradução). Por isso mesmo, as crescentes migrações, as redes sociais, o acesso à informação digital em tempo real, criaram desafios à integridade do *self* que é preciso considerar.

Alguns desses desafios prendem-se com as representações sociais, que se desenvolvem ao longo da vida e são influenciadas pelas interacções sociais que estabelecemos. Os alunos constroem representações sociais das diversas disciplinas e áreas de conhecimento, bem como deles próprios, enquanto aprendentes. À Matemática estão frequentemente associadas representações sociais negativas: é difícil, um bicho-de-sete-cabeças, só para os muito inteligentes, ou sou nulo em Matemática, não percebo nada, como afirmaram diversos alunos (César, 2012a; César & Machado, 2012; Machado, 2009; Machado & César, 2012, 2013; Piscarreta, 2002; Piscarreta & César, 2004). Como as representações sociais são dinâmicas (Marková, 2005; Moscovici, 2000), mudam ao longo do tempo, sendo configuradas pelas vivências de cada pessoa e pelas interacções sociais que estabelece. Assim, as representações sociais são configuradas pelas reflexões, mas também pelos processos interactivos. As diversas representações sociais que construímos podem ter aspectos contraditórios, pelo que também são dialógicas (Marková, 2005) e susceptíveis de nos causar desconforto, ou mesmo sofrimento (César, 2009, 2013a, 2013b, 2017, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b, 2025).

O recurso ao trabalho colaborativo e dialógico revelou-se eficiente para promover representações sociais mais positivas da Matemática e de si próprio, enquanto aluno (César, 2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b; César et al., 2014; César & Machado, 2025). Menezes (2023) descreve o caso de uma aluna com

uma representação social, enquanto aprendente, complexa, bem como as estratégias que esta utiliza para aprender Matemática. Realçamos o carácter dialógico das representações sociais, que podem apresentar aspectos contraditórios, como os que ilustrou César (2009, 2013a, 2013b), quando analisava o percurso de um aluno, designado por V. que, anteriormente, não participava nas aulas de Matemática e, depois, passou a resolver as tarefas e a participar na discussão geral, no grupo turma, mas não percebia se queria, ou não, ter aquela nova forma de estar, em aula. Revela também como este aluno, no primeiro teste individual de avaliação, achou que o professor se tinha enganado ao avaliar o teste dele como positivo (César, 2009), pois não acreditava que conseguisse atingir esse nível, em Matemática. Assim, as representações sociais são dinâmicas, mas levam tempo a mudar e este processo não é isento de avanços e recuos, nem de algum sofrimento, principalmente quando os alunos participam em famílias que não valorizam a Escola e o acesso ao sucesso escolar, o que os faz questionar a trajectória de participação ao longo da vida que pensavam traçar e a ter muitas dúvidas sobre as decisões que tomam, nomeadamente as escolares, profissionais e pessoais (amigos, namorados, colegas).

Santos e Ferreira (2023) discutem uma questão, que também observámos no projecto IC: nem sempre é claro, nas narrativas dos participantes, quando estes se referem à Matemática, enquanto disciplina, ou como área do conhecimento. Segundo estes autores, esta falta de clarificação também se observa na investigação em Educação Matemática e, por vezes, nos currículos, manuais escolares e, até, em alguns documentos legais. Discutem, ainda, uma outra questão importante: a relação entre currículos e instrumentos de avaliação externa, vulgo exames. Esta é uma relação complexa, pois tanto observamos exemplos em que a existência de exames nacionais influenciou, de forma negativa, os currículos e as práticas, em aula, como outros exemplos em que currículos mais abertos, que propunham operacionalizações mais diversificadas, tiveram impactes positivos no tipo de avaliação externa proposta, nomeadamente no que se designa por exames nacionais, ou levaram mesmo a que estes fossem abolidos por considerarem que havia outras formas de avaliação mais adequadas. De salientar que, para a existência de uma educação intercultural e inclusiva, é fundamental as práticas, em aula, recorrerem a tarefas de diferentes naturezas (problemas, trabalhos de

projecto, pequenas composições matemáticas, investigações, exercícios, entre outros), a instrumentos de avaliação diversificados, realizados de forma individual, em díade e em pequeno grupo, em diferentes modalidades (orais, escritos, digitais, em vídeo), de modo a adequá-los a todos os tipos de aluno. A forma como se operacionaliza o currículo, bem como a desdramatização das provas de aferição externa nacionais e outras formas de avaliação, são passos essenciais numa educação intercultural e inclusiva. São particularmente importantes para os alunos que vivenciaram insucesso académico anteriormente e que, geralmente, necessitam de construir uma auto-estima académica positiva.

Goldenberg (1998) salientava que "a Matemática [...] é acerca do raciocínio que descobre, reúne e dá sentido a esses conteúdos; a Matemática é (em parte) um modo de pensar" (p. 37). Valorizar a importância do raciocínio matemático tem subjacente uma perspectiva dinâmica, de conhecimento que se constrói, em interacção com os outros: pares, professores, autores cujos livros e artigos se consultam e outros significativos. Precisamente porque os raciocínios são tão importantes, é necessário respeitar as formas naturais de abordagem, raciocínio e as estratégias de resolução, em função da L1, como salientaram César (2024b) e César e Machado (2024a, 2024b). Porém, é também importante adequar a natureza das tarefas propostas, em aula, estabelecer um contrato didáctico negociado com os alunos e recorrer a formas de avaliação coerentes com as práticas.

Skemp (1978) distinguiu entre tarefas que promovem o conhecimento instrumental, que habitualmente designamos por exercícios, e aquelas que desenvolvem o conhecimento relacional que, para ele, seriam os problemas. O conhecimento instrumental consiste em aprender maneiras de fazer, ou seja, como resolver tarefas fechadas, em que as instruções dizem o que deve ser feito. É um conhecimento mais mecanizável, que faz menos apelo à compreensão. O conhecimento relacional já estabelece conexões entre diversos conhecimentos, bem como entre estes e a vida real. Assim, favorece o que Abreu, Bishop e Presmeg (2002) designam por transições que, segundo César (2009, 2013a, 2013b, 2024b) e César e Machado (2024a, 2024b), facilitam a internalização e apropriação dos conhecimentos matemáticos, permitindo utilizá-los noutros contextos, cenários e situações. Para estes autores, o conhecimento relacional é promovido através de problemas, mas também de trabalho de projecto, de investigações matemáticas e

de outras tarefas abertas, que permitam explorar diferentes abordagens, raciocínios e estratégias de resolução. Apesar de existirem diversas tipologias quanto à natureza das tarefas, nem sempre concordantes entre si (Machado, 2014), o que nos parece de realçar é que as tarefas se distribuem num *continuum* entre tarefas abertas e fechadas, variando também em função do nível de complexidade. Mas, um mesmo tipo de tarefa (ex: um problema) pode ter níveis de dificuldade muito diferentes consoante a sua formulação, as instruções de trabalho e o contrato didáctico da aula em que essa tarefa é proposta (Machado, 2014). Por isso mesmo, o que é importante realçar é a necessidade de explorar tarefas de diferentes naturezas e com um grau de dificuldade adequado àqueles alunos, incluindo algumas mais desafiadoras.

O trabalho colaborativo e dialógico tem sido referido por muitos autores como um contributo positivo para o acesso ao sucesso escolar e para a inclusão, nos diferentes níveis de escolaridade e em vários países e culturas (Baucal, Arcidiacono, & Budevac, 2011; César, 2001/2004; César & Calado, 2010; César & Machado, 2024a, 2024b; César & Kumpulainen, 2009; Cobb, 2006, 2012; Cobb & Bauersfeld, 2012; Davies & Renshaw, 2013; Giglio & Arcidiacono, 2017; Renshaw, 2004). Esta forma de trabalho facilita aquilo que se designa por "*agency*", ou seja, que os alunos ganhem autonomia e ajam enquanto participantes legítimos (César, 2009, 2024b; Lave & Wenger, 1991), capazes de expressar as suas vozes. Cobb (2006, 2012), César (2013b, 2024b) e César e Machado (2024b, 2025) realçam também a importância do trabalho colaborativo e dialógico na relação entre investigadores e professores, bem como na investigação, sobretudo na investigação inclusiva (Allan & Slee, 2008; Armstrong & Moore, 2004; César, 2017, 2024b). Assim, os impactes desta forma de trabalho permitem promover a aprendizagem a diferentes níveis: para os alunos; e para os profissionais (professores, investigadores), mais ou menos experientes. A equipa do IC realça três aspectos essenciais para que os alunos adiram mais facilmente a esta forma de trabalho: (1) uma primeira semana de aulas diferente, em que não se exploram novos conteúdos, usando-a para conhecer melhor as capacidades, competências e características dos alunos; (2) as mensagens implícitas que são transmitidas através das práticas, nomeadamente as que indicam que todos são capazes de fazer e aprender (Matemática); e (3) a exploração, durante a discussão

geral, na turma, de diversas abordagens, raciocínios e estratégias de resolução, usados numa mesma tarefa. Esta forma de atuação contribui para a existência de espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004) e para a emergência de uma comunidade de aprendizagem (Civil, 2007).

Faustino e Skovsmose (2020) realçam um outro aspecto relevante: que, para avançar no conhecimento, através de um processo dialógico, é necessário ser capaz de correr riscos. Riscos que correm tanto os professores, como os alunos.

> Durante um processo dialógico, os professores assumem riscos ao criar oportunidades para que os alunos encontrem o seu próprio caminho através de uma investigação matemática. Simultaneamente, os alunos assumem riscos ao partilhar as suas ideias preliminares com outros alunos. A própria noção de risco inclui algumas conotações negativas, sugerindo que se deve tentar evitar correr o risco. Contudo, os riscos relacionados com o diálogo também incluem oportunidades novas, inesperadas e potencialmente frutíferas. (Faustino & Skovsmose, 2020, p. 9)

Para que os professores estejam dispostos a correr riscos, é necessário que desenvolvam uma consciência epistemológica (César, 2008), que queiram agir como decisores e não como meros executores do currículo, como salientavam Leite e Sousa-Pereira (2023). Para César (2009, 2013b, 2014, 2017, 2024b), os riscos que os professores assumem vão muito além dos que referem Faustino e Skovsmose (2020), pois incluem fomentar o recurso a diversas abordagens, raciocínios e estratégias de resolução, incluindo as que, habitualmente, não são estimuladas e aceites, em aula. Também englobam recorrer a mediação cultural biunívoca (César, 2017), o que tem subjacente distribuir o poder em relação a pessoas de diferentes culturas e com diferentes posicionamentos, enquanto agentes educativos. Por último, subscrever os princípios do projecto IC era também um risco, não isento de críticas, por parte dos pares e de alguns encarregados de educação, tal como é frequente acontecer com projectos de investigação bastante inovadores. Por isso, o papel desempenhado pelo trabalho colaborativo e dialógico, dentro da própria equipa do projecto IC, era essencial para construir um

espaço de pensamento (Perret-Clermont, 2004) e para que os professores/investigadores se sentissem apoiados. Quanto aos alunos, os riscos também íam além de expor ideias preliminares. Para um aluno que vivenciou muito anos de críticas negativas e de insucesso académico cumulativo, aceitar ir ao quadro explicar uma estratégia de resolução de uma tarefa pouco habitual (IACC), na 2.ª aula daquele ano lectivo, é um enorme risco. Que toda a turma fosse ao quadro, nessa aula, fazer isso mesmo, é um risco para o professor, que tem de ter preparado aquela intervenção com imenso rigor e cuidado, mas também para os alunos, que se expõem mais do que habitualmente. Por isso, o trabalho colaborativo e dialógico comporta riscos, que tanto professores, como alunos, têm de estar dispostos a correr. Mas, como salienta César (2009, 2017, 2024b), isso só é possível se os implícitos utilizados, desde as primeiras aulas, distribuírem o poder e permitirem construir um ambiente securizante, em aula.

O trabalho colaborativo e dialógico pode ser realizado em díade, tríade ou pequenos grupos. César (2009, 2013a, 2013b) e César e seus colaboradores (2014) descrevem que os alunos começam por trabalhar em díade (há também uma tríade se a turma tiver um número ímpar de alunos) e, posteriormente, juntando duas díades trabalham em pequenos grupos. Esta é uma primeira fase do trabalho colaborativo. Depois, segue-se uma discussão geral (Staples, 2007; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008), em grande grupo (turma), onde são exploradas diversas abordagens do problema, raciocínios e estratégias de resolução, utilizados numa mesma tarefa. Ao serem confrontados com esta diversidade de resoluções, os vários alunos sentem as suas formas naturais de pensamento legitimadas e isso contribui para aumentar a auto-estima académica positiva e a representação social que têm de si próprios, enquanto aprendentes. Os colegas, ao verem que o professor aceita esta diversidade, também aprendem a respeitar e valorizar a diferença, algo essencial numa educação intercultural e inclusiva. Assim, muitos dos valores que se aprendem, em aula, provêm das experiências, matemáticas e relacionais, que se vivem naquele cenário. Porém, para que isto seja possível, é essencial que, durante a primeira semana de aulas, o professor consiga conhecer as capacidades, competências e características dos alunos, para saber gerir, de forma eficiente, a discussão geral (César, 2009, 2024b; César &

Machado, 2025) e, ainda, para saber elaborar, adaptar ou selecionar as tarefas que vai propor aos alunos, em aula.

Para que os dois alunos que compõem uma díade consigam progredir mais, em termos de desempenhos matemáticos, mas também de desenvolvimento, é necessário que tenham capacidades e competências complementares (César, 1998b, 2009, 2024b; César et al., 2014; César & Machado, 2024a, 2024b), que já conseguem mobilizar, quando trabalham individualmente, ou seja, que já fazem parte do seu desenvolvimento real (Vygotsky, 1934/1962). Assim, se a natureza das tarefas propostas for adequada, conseguem trabalhar na sua Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Segundo Vygotsky (1934/1962), isso favorece que as capacidades que ainda pertencem ao desenvolvimento potencial, ou seja, que os alunos só conseguem mobilizar quando trabalham com um par mais competente, passem também a fazer parte do desenvolvimento real. Porém, César (2009, 2013a, 2013b, 2024b) iluminou que o trabalho colaborativo e dialógico era ainda mais poderoso do que aquilo que Vygotsky (1932/1978) previa, pois tanto o par mais competente, como o menos competente, conseguiam progredir nas suas aprendizagens e desenvolvimento. Isso era ainda mais nítido se a natureza das tarefas propostas favorecesse a alternância do par mais competente, ou seja, se ambos os alunos, em cada díade, conseguissem desempenhar este papel em momentos diferentes e alternados da resolução das tarefas. Mas, para que isso fosse possível, era essencial conhecer muito bem as capacidades e competências dos alunos, algo que habitualmente não acontece, nas escolas, em Portugal.

Como a evidência empírica de ser essencial conhecer bem as capacidades e competências dos alunos, principalmente as que eram relevantes para a aprendizagem da Matemática, surgiu assim que César (1994) realizou a recolha e análise de dados da sua tese de doutoramento, esta autora decidiu elaborar, em colaboração com diversos professores, um instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC), relacionadas com a Matemática (Machado, 2014; Ventura, 2012), que permitisse aos professores identificá-las durante a primeira semana de aulas. Assim, para esta autora, não bastava ter acesso aos conhecimentos matemáticos que os alunos conseguiam mobilizar e que, habitualmente, eram identificados, no início do ano lectivo, através de testes de diagnóstico. Era

fundamental saber que capacidades e competências os alunos conseguiam mobilizar, pelo que a observação cuidada e registada com rigor, bem como a análise do IACC, complementada pela análise da TIP1 e do Q1, constituíam pontos fulcrais para a formação das primeiras díades, algo que era da responsabilidade dos professores/investigadores (César, 2009, 2024b; César et al., 2014; César & Machado, 2024a, 2024b, 2025; Machado, 2014; Ventura, 2012).

Porém, se as evidências empíricas deste primeiro estudo (César, 1994; César, Perret-Clermont, & Benavente, 2000), bem como a experiência como supervisora de estágios de futuros professores de Matemática, já apontavam para a necessidade de conhecer bem as capacidades e competências dos alunos, foi apenas quando realizou uma meta-análise de todo o *corpus* empírico do projecto IC, que cunhou o conceito de Modeladores Pessoais de Desempenho (MPD)/*Personal Performance Shapers* (PPS) (César, 2024b). A designação "modeladores" (*shapers*) é utilizada no sentido de algo que configura (*shapes*), que influencia, ou seja, tal como é concebido na teoria da *gestalt* e por Vygotsky (1934/1962, 1932/1978, 1985), quando identificam os múltiplos elementos que configuram os desempenhos, em diversos contextos. Portanto, não assumimos uma perspectiva *neo-behaviourista*, de modelação e de condicionamento, que não corresponde ao quadro de referência teórico que elaborámos. Esta ressalva é particularmente importante em Educação, onde assumir uma abordagem desenvolvimentista, concebendo as capacidades e competências como em evolução ao longo do ciclo de vida (César, 2024b; Machado, 2014; Ventura, 2012), contraria uma perspectiva psicométrica (Anastasi, 2003; Binet & Simon, 1904; Freeman, 1976; Spearman, 1904; Wechsler, 1939, 1958, 1997), onde estas permanecem inalteráveis, ao longo da vida, em termos métricos, ou seja, no que se refere à medição (ex: o QI é suposto ser o mesmo ao longo da vida).

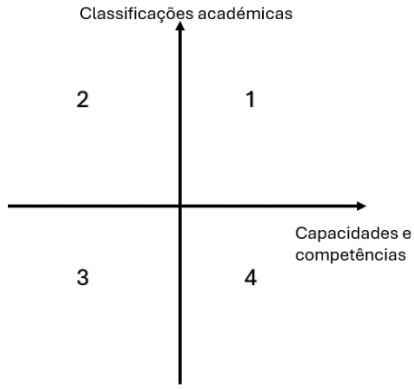
Assumir uma perspectiva desenvolvimentista das capacidades e competências (Longeot, 1966, 1969, 1979), significa que, o que pretendemos, é o oposto do que costuma acontecer quando se avaliam capacidades recorrendo a instrumentos que subscrevem a perspectiva psicométrica. O que é habitual, quando se usa este tipo de instrumentos, é recorrer à psicometria como forma de identificar o que os alunos não conseguem fazer, ou seja, como forma de justificar o seu insucesso académico e, por vezes, a sua indicação para ramos do sistema de

ensino que são menos exigentes (e valorizados, socialmente). Muitos relatórios de psicólogos e pedopsiquiatras estão escritos neste sentido: para mostrar a falta de capacidades. O que pretendíamos, quando elaborámos o IACC e quando usámos uma concepção desenvolvimentista de capacidades e competências, era o oposto: iluminar aquilo que os alunos já conseguiam mobilizar para, a partir daí, construir novas aprendizagens e promover o seu desenvolvimento. Por isso mesmo, quando escrevemos, realçamos o que cada aluno, de uma determinada díade ou pequeno grupo, pode proporcionar, em termos de aprendizagens e desenvolvimento, aos pares que trabalham com ele. O trabalho colaborativo e dialógico, encarado nesta perspectiva, serve como ferramenta para promover os desempenhos (matemáticos), as aprendizagens e o desenvolvimento. Trabalham-se capacidades e competências cognitivas, sociais, emocionais, bem como valores morais. Promove-se, através das práticas, a aceitação das diferenças e a celebração da diversidade. Daí que os relatórios que elaboramos identifiquem o que os alunos já mobilizam e o que prevemos desenvolver, a partir dessas capacidades e competências, sendo as competências conhecimento-em-acção (Abrantes et al., 1999), ou seja, conhecimentos que os alunos já conseguem utilizar, de forma autónoma, noutros contextos, cenários e situações.

Do ponto de vista escolar, os modeladores pessoais de desempenho (MPD) (César, 2024b) são os critérios pessoais que mais influenciam os desempenhos: (1) as capacidades e competências que aquela pessoa já consegue mobilizar, sobretudo as que se relacionam directamente com aquele domínio do conhecimento (ex: Matemática); e (2) as classificações académicas obtidas nos anos lectivos anteriores, que refletem, ou deveriam espelhar, os conhecimentos que um determinado aluno apropriou e já consegue mobilizar quando trabalha autonomamente. Cada um destes dois critérios se distribui num *continuum*, que pode ser representado por cada um dos eixos de um referencial (Figura 1): eixo das abcissas; e eixo das ordenadas. Assim, definem-se quatro quadrantes.

Figura 1

Modeladores Pessoais de Desempenho (MPD)



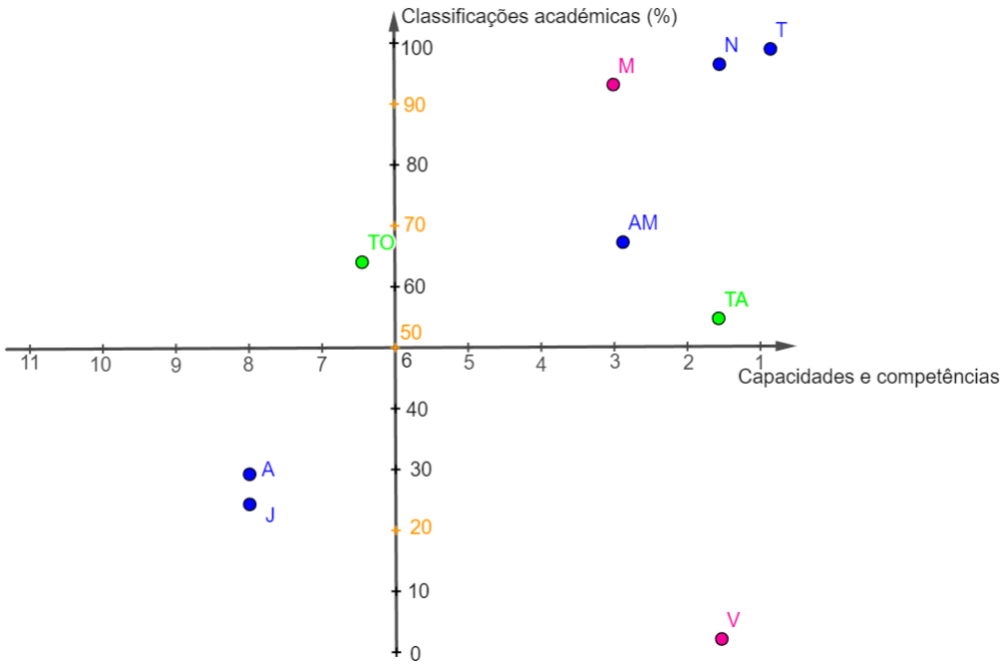
Tratando-se de um referencial com dois eixos, em cada turma podemos identificar a nuvem de pontos correspondente às posições ocupadas pelos diversos alunos, caracterizando-a de uma forma mais detalhada (Figuras 64 e 65). Como realça César (2024b), habitualmente os professores apenas distinguem dois grupos: alunos com sucesso académico; e sem sucesso académico. Mas, recorrendo aos modeladores pessoais de desempenho (MPD), temos uma visão mais completa, pois definimos quatro quadrantes e cada um destes quadrantes corresponde a um grupo de alunos, com características distintas: (1) Quadrante 1 – capacidades e competências mais desenvolvidas e classificações académicas médias a elevadas; (2) Quadrante 2 – classificações médias a elevadas e capacidades e competências menos desenvolvidas; (3) Quadrante 3 – capacidades e competências menos desenvolvidas, e classificações de nível negativo; e (4) Quadrante 4 – capacidades e competências mais desenvolvidas e classificações de nível negativo.

Como as capacidades e competências são concebidas num paradigma desenvolvimentista, estas evoluem ao longo da vida, pois o desenvolvimento dá-se do nascimento até ao final da vida (ciclo de vida). Por isso mesmo, todos os alunos podem progredir no que se refere às capacidades e competências. Deste modo, alunos que já tenham atingido as classificações académicas máximas, podem progredir nas capacidades e competências e, se em vez de considerarmos apenas as classificações académicas, nos focarmos nos conhecimentos

matemáticos, também podem continuar a progredir, aprendendo mais, mesmo que isso não altere a classificação académica, se esta já era a mais elevada possível. No ensino básico, como os alunos são classificados em Níveis de 1 a 5, mesmo sem alterar o nível obtido, podem obter uma percentagem mais elevada, o que deveria corresponder a serem capazes de mobilizar mais conhecimentos.

Figura 2

Nuvem de pontos dos MPD de alguns alunos já analisados anteriormente



Assim, mesmo os alunos que se situam no Quadrante 1 e que já obtiveram a classificação máxima, têm margem de progressão e podem beneficiar por trabalharem em díade ou em pequenos grupos, de forma colaborativa e dialógica. César (2003, 2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b) e César e Machado (2024a) analisaram a díade formada pela M. e pelo V., alunos cujas trajectórias de participação ao longo da vida continuamos a detalhar, neste livro. A M. é um exemplo de como uma aluna que já obtinha a classificação máxima (Nível 5), mas que ainda podia progredir no que se refere às capacidades e competências, algo que

a iria beneficiar no ensino secundário, bem como em relação aos conhecimentos, nomeadamente de Geometria e Probabilidades. Um outro exemplo é o da T. e do N. que, trabalhando num pequeno grupo (quatro alunos), são analisados por César (2014), César e seus colaboradores (2014) e César e Santos (2006). Apesar de ambos terem obtido Nível 5 (máximo possível), estando muito perto da ponta do eixo das classificações, a T. mobilizava mais capacidades e competências do que o N., pelo que, embora estando ambos no Quadrante 1, se considerarmos a nuvem de pontos representada por todos os alunos de uma determinada turma, a T. estaria numa posição mais à direita que o N. (Figura 2), o que indica capacidades e competências mais desenvolvidas do que as dele. Por isso mesmo, em cada turma, é importante ver como se distribui a nuvem de pontos e não apenas quantos alunos fazem parte de cada um dos grupos definidos por cada quadrante, pois é isso que permite compreender melhor as potencialidades de evolução daquela turma (Figuras 64 e 65), dando informações relevantes para as decisões sobre as primeiras díades a formar e que tarefas matemáticas propor, nas primeiras aulas em que estudam conteúdos programáticos daquele ano de escolaridade.

No Quadrante 2 situam-se os alunos cujas capacidades e competências ainda não são muito desenvolvidas, mas as classificações são de nível positivo. Aqui, situava-se, por exemplo, o Tomás, descrito em César (2017) e César e Machado (2024b), que também analisamos neste livro, e que estava muito próximo de passar para o Quadrante 1, mas ainda se encontrava no Quadrante 2, pois ainda não conseguia mobilizar o raciocínio abstracto (RA) em algumas situações (Tarefas C e E), não revelava sentido crítico (Tarefa A), nem intuição matemática (Tarefa B), embora já estabelecesse conexões entre a matemática escolar e a vida real (Tarefa E), bem como compreendesse instruções escritas e soubesse analisar figuras geométricas e, através de raciocínios analíticos e uma estratégia de resolução aritmética, calcular áreas (Tarefa D).

No Quadrante 3, situam-se os alunos cujas capacidades e competências ainda estão pouco desenvolvidas e cujas classificações obtidas são de nível negativo. Um exemplo, analisado por César (2014), César e seus colaboradores (2014) e César e Santos (2006) é o do J., aluno sinalizado como apresentando necessidade de AESE (César et al., 2014), que, à época, se designavam por Necessidades Educativas Especiais (NEE). Se tivéssemos apenas tido acesso às

classificações (Nível 2, nível negativo, bastante baixo em termos de percentagem obtida) e nos limitássemos a acreditar nas capacidades e competências descritas em relatórios de médicos e de psicólogos de anos anteriores, bem como de professores (César et al., 2014; César & Machado, 2025), teríamos pensado que o J. se situava muito abaixo das capacidades e competências que revelou conseguir mobilizar. Porém, a análise do IACC iluminou que ele tinha acesso ao raciocínio concreto (RC), sendo capaz de analisar uma figura complexa (Tarefa C), conseguia compreender instruções escritas, percebia as noções de lucro e prejuízo, aplicadas a compras e vendas (Tarefa E), estabelecendo conexões entre a Matemática escolar e a vida real, conseguia decompor uma figura (Tarefa D), recorrendo ao raciocínio geométrico e a uma estratégia de resolução por representação gráfica, para comparar áreas. Por isso, revelou muito mais capacidades e competências relacionadas com a Matemática do que as descritas nos relatórios e esse conhecimento, por parte da professora/investigadora, permitiu perceber como promover as suas aprendizagens.

Assim, mais uma vez, analisar as resoluções das tarefas do IACC foi um passo essencial para identificar as capacidades e competências que o J. já mobilizava e percebermos como começar a desenvolver outras, promovendo os seus desempenhos matemáticos. Se considerássemos a nuvem de pontos daquela turma, ele estava no Quadrante 3, mas bastante perto do eixo das classificações, o que lhe dava uma margem de progressão bastante elevada, algo que contrariava o que diziam os relatórios e os professores de anos lectivos anteriores, nomeadamente em conversas informais, bem como as expectativas dos pais, com quem conversámos no início do ano lectivo. Importa realçar que os resultados dele, no 8.º e no 9.º ano de escolaridade, confirmaram as previsões da equipa do IC. O sucesso no curso profissional em que se inscreveu, no ensino secundário (10.º ao 12.º ano de escolaridade) é outra evidência empírica disso mesmo, até porque mudou de escola, o que implicou diversas adaptações da sua parte: a uma nova cultura de escola; outros professores e colegas; outros contratos didácticos; e formas de avaliação diferentes, onde já existia uma escala de 0 a 20 valores. Por último, a autonomia financeira que conseguiu vir a ter, bem como a vida profissional, de sucesso, e a família que construíu, mostram que as suas capacidades e competências eram muito superiores ao que diziam os relatórios e que era a falta

de práticas pedagógicas adequadas e de expectativas positivas, por parte dos professores e da própria família, que o estavam a penalizar (César & Machado, 2025). Assim, o J., que também é um exemplo paradigmático, ilustra, mais uma vez, a importância de ter em consideração os modeladores pessoais de desempenho (MPD) e de avaliar as capacidades e competências através de instrumentos desenvolvimentistas e adequados às aprendizagens matemáticas, em vez de recorrer a testes psicométricos (ex: WISC – *Wechsler Intelligence Scale for Children*, Matrizes Progressivas de Raven, D70), onde alunos mais lentos são fortemente penalizados, nomeadamente quando, como ele, têm algum comprometimento motor.

No Quadrante 4 situam-se os alunos cujos desempenhos matemáticos progridem, em geral, mais rapidamente, quando trabalham de forma colaborativa e dialógica. Como têm capacidades e competências bastante desenvolvidas, recorrendo a tarefas matemáticas cuja natureza lhes permite actuar como par mais competente, em alguns momentos, alternando esta posição com outro elemento da díade, trabalhando ambos na sua ZDP (César, 2009; Vygotsky, 1934/1962), tendem a progredir rapidamente nos desempenhos matemáticos, como mostra o exemplo do V., analisado por César (2003, 2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b) e por César e Machado (2024a). Este é um exemplo particularmente interessante, pois um aluno que obtinha Nível 1 (o mais baixo possível e bastante raro) e tinha relatórios, de anos lectivos anteriores, de professores e de um psicólogo, que o descreviam como "incapaz de qualquer raciocínio matemático" (César, 2009, 2013b), não só obteve Nível 5 no final do 3.º período, como teve 100% na prova final de escola (vulgo exame), no 9.º ano de escolaridade, um instrumento de avaliação que é elaborado e corrigido por outros professores. Mais impactante ainda, foi ser um dos raros alunos a obter 20 valores na prova de avaliação externa nacional (vulgo exame nacional) de Matemática A, no final do 12.º ano de escolaridade. Este exemplo paradigmático ilumina, de forma clara, como é essencial conhecer e ter em consideração as capacidades e competências, e não apenas os conhecimentos de anos lectivos anteriores, ou seja, considerar os MPD (César, 2024b). Se conhecermos bem as capacidades e competências dos alunos, relacionadas com a Matemática, também conhecemos a abordagem aos problemas, tipos de raciocínio e estratégias de resolução que lhes são naturais.

Fomentar que as usem, em aula, é fundamental para que, depois, eles consigam aprender outras e, ainda, para promover os desempenhos matemáticos.

Convém realçar que, neste referencial, estamos apenas a considerar os critérios pessoais que influenciam os desempenhos matemáticos. Para além destes, é preciso também ter em atenção outros critérios, que já não são pessoais, como o contrato didáctico (Brousseau, 1988; Schubauer-Leoni, 1986), sugerido pelo professor e, depois, negociado com os alunos, a natureza das tarefas propostas em aula, os instrumentos de avaliação considerados, ou as modalidades de trabalho promovidas, como o trabalho individual, em díade ou em pequenos grupos. Os MPD explicam a parte pessoal que configura os desempenhos e permitem-nos prever possíveis margens de progressão dos alunos (César, 2024b). Porém, os restantes critérios, muitos deles decididos pelos professores ou por quem tem mais poder de decisão (ex: Ministério da Educação), jogam um papel essencial na progressão dos desempenhos, ou no bloqueio dos mesmos. Para o V., foi essencial que o professor/investigador, que lecionava a turma que ele frequentava, no 9.º ano de escolaridade, usasse mecanismos de *inter-empowerment* desde a primeira semana de aulas, incluindo as mensagens implícitas, e que fomentasse que os alunos partissem das suas abordagens dos problemas, tipos de raciocínio e estratégias de resolução naturais. Depois, na discussão geral, em grande grupo (turma), foi fundamental que o professor/investigador explorasse as diversas abordagens, raciocínios e estratégias de resolução que os alunos tinham utilizado, em cada tarefa, favorecendo que, mesmo na discussão geral, eles pudessem trabalhar na sua ZDP (Vygotsky, 1934/1962), fomentando as aprendizagens e o desenvolvimento.

Na Figura 2, o eixo das capacidades e competências (eixo das abcissas), avaliadas principalmente com o IACC, e complementadas com as informações da primeira tarefa de inspiração projectiva (TIP1), do primeiro questionário (Q1) e observação (O) da primeira semana de aulas, existem 11 posições possíveis (Anexo 2). Sendo o raciocínio abstracto (RA) mais avançado, do ponto de vista do desenvolvimento, do que o raciocínio concreto (RC), no semi-eixo positivo estão os alunos que já o conseguem mobilizar, enquanto no semi-eixo negativo estão os que mobilizam o raciocínio concreto (RC) e os que apresentam resoluções que revelam maiores dificuldades, pelo necessitam de uma análise mais

detalhada (Posição 11). Estas resoluções eram muito raras, mas exigiam um cuidado maior de análise, quando aconteciam. O traço mais à direita (Posição 1, a mais elevada), mais perto da ponta do eixo das abcissas, representa a posição dos alunos que foram bem-sucedidos em todas as tarefas do IACC (cinco tarefas) e que elaboraram explicações completas para as suas resoluções. Quando alguns alunos, como a T., se encontram mais à direita desse ponto, isso significa que a TIP1, o Q1 e a observação permitiram identificar outras capacidades e competências, como a capacidade de organização, o rigor e a verificação das resoluções. Algo semelhante aconteceu em relação ao N., que foi bem-sucedido em todas as tarefas do IACC, mas nem sempre elaborou explicações completas (Posição 2). Porém, também revelou outras capacidades e competências, para além das que eram analisadas no IACC. Contudo, a observação mostrou que a T. era bastante calma, enquanto o N. era mais impulsivo, o que também configurou o par escolhido para cada um deles. O V., que também estava na Posição 2 do IACC, mostrou outras capacidades e competências, como a criatividade ou a capacidade de argumentação. Portanto, alunos que estejam na mesma Posição quanto às capacidades e competências (ex: N., TA e V.), podem ter capacidades diferentes no que se refere às que não são analisadas no IACC. Para além disso, podem preferir formas naturais de abordagem, raciocínio e estratégias de resolução diferentes, ou seja, estando no mesmo nível de desenvolvimento, podem mobilizar capacidades e competências complementares.

O eixo das classificações académicas (eixo das ordenadas) tem algumas percentagens a laranja, para indicar a mudança de nível da escala utilizada no 3.º ciclo do ensino básico: Nível 1 (o mais baixo), até 19%; Nível 2 (nível negativo mais elevado) de 20 a 49%; Nível 3 (nível positivo mais baixo) de 50 a 69%; Nível 4, de 70 a 89%; e Nível 5 (o mais elevado possível) de 90 a 100%. Como se observa por esta distribuição das percentagens em relação a cada um dos níveis, trata-se de uma escala ordinal, mas não de uma escala de intervalos. O Nível 5 é o mais elevado e o Nível 1 o mais baixo. Porém, há apenas dois níveis (Nível 1 e Nível 2) para as classificações de nível negativo, mas existem três níveis (Nível 3, Nível 4 e Nível 5) para as de nível positivo. Por isso mesmo, existe uma ordem, mas o intervalo entre os níveis não é constante. Se esta figura se referisse a turmas do ensino secundário, a escala utilizada seria de 0 a 20 valores, sendo

os 10 valores a primeira classificação positiva, ou seja, já se trata de uma escala de intervalos, que permite tratamentos estatísticos mais elaborados, como a média e o desvio-padrão, para caracterizar as turmas.

A Figura 2 mostra a nuvem de pontos referente aos alunos cujos exemplos já foram analisados e discutidos em artigos e capítulos de livros. Cada cor identifica uma turma diferente: (1) cor-de-rosa para a turma do V. e da M. (César, 2000, 2003, 2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b; César & Machado, 2024a); (2) verde para a turma da Tatiana (TA) e do Tomás (TO) (César, 2017; César & Machado, 2024b); e (3) azul para a turma do J., da T., do N., da A., e da AM. (César, 2014; César et al., 2014; César & Machado, 2025; César & Santos, 2006). As díades e respectivas trajectórias de participação ao longo da vida dos alunos a rosa e a verde são também discutidas neste livro. Na Figura 2 optámos por localizar estes alunos, para se perceber os impactes deste novo conceito, MPD (César, 2024b), nas díades e grupos que já analisámos e discutimos. Nas Figuras 64 e 65, apresentamos a nuvem de pontos de cada uma das turmas das díades analisadas neste livro e isso permite visualizar e compreender como estas duas turmas eram diferentes, quanto a estes dois parâmetros que caracterizam os modeladores pessoais de desempenho (MPD). Estas nuvens de pontos possibilitam uma análise mais detalhada dos desafios que cada turma comporta, ajudando a clarificar algumas decisões sobre as práticas a desenvolver, em aula, de modo a promover os desempenhos matemáticos dos alunos, bem como as aprendizagens e o desenvolvimento (César, 2024b).

Quando os professores/investigadores desenvolveram os projectos de investigação-acção, o conceito de MPD ainda não tinha sido cunhado. Porém, já estava decidido que os primeiros alunos para quem se decidiam os pares eram os que necessitavam de AESE (César et al., 2014) e os que apresentavam capacidades e competências menos desenvolvidas, associadas a classificações mais baixas, ou seja, aqueles que, na Figura 2, correspondem ao Quadrante 3. A turma do J. participou no projecto IC no 8.º e 9.º ano de escolaridade. Nesta turma, o J. era o aluno que mais cuidado necessitava na escolha do par, pois era fortemente rejeitado pela turma, como relatam César (2014), César e seus colaboradores (2014), César e Machado (2025) e César e Santos (2006). Assim, escolher um par que tivesse capacidades e competências complementares, mas não muito

distantes das do J., para que conseguissem trabalhar ambos na sua ZDP (César, 2009; Vygotsky, 1934/1962), era algo essencial. Mas também tinha de ser alguém calmo, com capacidade de observação e escuta, que não se negasse a trabalhar com ele. Foram essas características que nos levaram a escolher a AM., uma decisão que se veio a revelar adequada, para ambos. A T., que trabalhou com ele posteriormente, no final do 3.º período, no início do ano teria sido pouco adequada, porque a distância entre eles era demasiado grande, quer em termos de capacidades e competências, quer de classificações académicas, não lhes permitindo trabalharem na sua ZDP, de forma alternada. César (1994), analisou detalhadamente esta questão. Por isso mesmo, foi necessário o J. progredir durante vários meses e a T. desenvolver qualidades relacionais que não mobilizava no início do ano lectivo, para que esta díade fosse adequada (César et al., 2014; César & Machado, 2025; César & Santos, 2006).

No que se refere à M. e ao V., tratava-se de uma turma com 28 alunos e onde apenas quatro alunas tinham obtido classificações de nível positivo (Nível 4 e Nível 5, os mais elevados) no ano lectivo anterior e que só participaria no projecto IC no 9.º ano de escolaridade (Figura 64). Isso tornava urgente que mais alunos progredissem ao nível dos desempenhos matemáticos e das classificações académicas. O V. e a M. estavam em polos opostos quanto às classificações obtidas em anos lectivos anteriores. Porém, no que se refere às capacidades e competências, ambos mobilizavam várias das analisadas no IACC, além de apresentarem capacidades e competências complementares. Por isso, era muito provável que, ao trabalhar com a M., o V. progredisse nos desempenhos matemáticos e desenvolvesse capacidades e competências que a M. já mobilizava, bem como que ela aprendesse a visualizar melhor e desenvolvesse o raciocínio espacial e o raciocínio geométrico, que era preferencial nele, mas não nela (César, 2003, 2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b; César & Machado, 2024a). Sendo as capacidades e competências de ambos muito desenvolvidas, apesar da diferença ao nível das classificações académicas, eles conseguiam trabalhar na sua ZDP e alternar o papel de par mais competente, ao longo das resoluções, se a natureza das tarefas propostas fosse cuidadosamente escolhida.

A turma da Tatiana (TA) e do Tomás (TO) participou no projecto IC durante o 3.º ciclo do ensino básico, ou seja, do 7.º ao 9.º ano de escolaridade. Era

uma turma onde poucos alunos tinham obtido uma classificação académica de nível negativo e a maioria tinha obtido Nível 3 ou Nível 4, ambos positivos (Figura 65). Assim, a preocupação em desenvolver as capacidades e competências era central, como forma de promover os desempenhos matemáticos. As capacidades e competências do Tomás e da Tatiana eram complementares e, apesar de ela não acreditar nisso, as da Tatiana eram mais desenvolvidas do que as do Tomás. No que se refere às classificações académicas, o Nível 3 do Tomás estava mais próximo do Nível 4, enquanto o da Tatiana estava pouco acima dos 50%. Portanto, ambos podiam progredir bastante se trabalhassem em conjunto, como veio a suceder e eles próprios reconheceram (César, 2017; César & Machado, 2024b).

Na investigação, o trabalho dialógico e colaborativo pode, também, ser usado em equipas mais alargadas, ou seja, em grande grupo. Era o que acontecia no projecto IC (Ventura, 2012). Mas também pode ser utilizado com menos participantes, quando se discutem interpretações de resultados, nas reuniões de grupo de mestrandos ou de doutorandos, ou partes dos artigos e livros que escrevemos e que são discutidos com os participantes cujos excertos vamos utilizar. Tanto na investigação, como em aula, o trabalho colaborativo e dialógico contribui para a aprendizagem e o desenvolvimento, facilitando a apropriação de conhecimentos, a sua mobilização e o desenvolvimento de capacidades e competências. O recurso a esta forma de trabalho, também permite ter uma versão mais alargada do que é o consentimento informado, uma vez que os participantes não se limitam a dar uma autorização prévia, voltando a autorizar a utilização e interpretação de cada excerto e tomando parte em algumas decisões de investigação (César, 2009, 2013a, 2013b, 2024b; César & Machado, 2025). O recurso a esta forma de trabalho distribui o poder, promove a inclusão e o estabelecimento de relações de trabalho mais duradouras, em que os participantes, por mote próprio, enviam informações que julgam relevantes para se perceber, de forma mais aprofundada, a trajectória de participação ao longo da vida. Evita, também, o sentimento de abandono e de serem descartáveis, algo que os participantes, por vezes, sentem, quando a recolha de dados é muito pontual.

Em aula, para evitar situações de dependência, em que apenas um dos alunos aprende com o outro, convém elaborar, adaptar ou selecionar tarefas que

possibilitem que cada aluno trabalhe na sua zona de desenvolvimento proximal (ZDP), ou seja, na distância entre o seu desenvolvimento real (aquilo que já consegue realizar sozinho, de forma autónoma) e o seu desenvolvimento potencial (as capacidades e competências que os alunos conseguem usar quando trabalham com um par mais competente, ou seja, que ainda precisam de ser desenvolvidas). Segundo Vygotsky (1934/1962), é quando trabalham na ZDP que mais se promove o desenvolvimento e a aprendizagem. Para César (2009), convém que as tarefas propostas aos alunos e o contrato didáctico, geralmente mais regido por implícitos do que por regras explícitas (Borba et al., 2024), permitam que os alunos exerçam o papel de par mais competente de forma alternada, durante a resolução das tarefas. Esta alternância potencia o desenvolvimento e a aprendizagem, bem como a promoção de uma auto-estima (académica) positiva, contribuindo para o acesso ao sucesso escolar. As comunidades de aprendizagem (Civil, 2007) e os espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004) promovem a equidade e a justiça social, distribuindo o poder e dando voz a todos os alunos. São particularmente importantes para os alunos que já vivenciaram formas de discriminação cultural (César, 2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b), de género (César, 2017; César & Machado, 2024b) ou que necessitam de AESE (César, 2014; César et al., 2014; César & Calado, 2010; César & Machado, 2025; César & Santos, 2006; Davies & Renshaw, 2013).

Ernest (2024) elabora um conjunto de reflexões sobre a Educação Matemática, questionando o que se designa por "bom", ou seja, assumindo que mesmo o que é habitualmente visto como desejável, para todos os alunos, pode ser analisado de forma mais aprofundada, descobrindo subtilezas que, para alguns alunos, revelam aspectos desadequados dessas decisões ou práticas: "Mas devemos reconhecer que o bom pode ocorrer em vários níveis, na educação, e que o bom é, em si, contingente, dependendo, portanto, do tempo, do lugar e da escala" (p. 4). No que escreve, assume, implicitamente, uma posição de aprendizagem situada (Lave & Wenger, 1991), uma vez que esta é configurada pelos contextos, cenários, situações e pessoas nela envolvidos, sendo ainda situada quanto à dimensão tempo. César (2009, 2013a, 2013b, 2014), bem como César e seus colaboradores (2014), também assumiram que a aprendizagem é situada e configurada pelos critérios acima referidos, bem como pelo currículo e suas formas de

operacionalização, pelo meta-contrato didáctico (Schubauer-Leoni, 1986), que rege aquela escola e que se constitui como um critério fundamental daquela cultura de escola.

Para Ernest (2024), referindo-se à educação matemática, é preciso questionarmos, de forma mais crítica e incisiva, alguns pressupostos que podem comprometer o respeito e a valorização da diversidade, ou seja, as características, interesses e necessidades de cada aluno, bem como o seu desenvolvimento e aprendizagem. Porém, o que este autor questiona em relação à educação matemática, pode também questionar-se em relação a outros domínios do conhecimento e aos sistemas de ensino, em geral.

> Os objetivos do ensino da matemática são totalmente bons? Os currículos planeados para a matemática são relevantes, apropriados e benéficos para todos? As práticas e pedagogias de ensino são ideais para todas as crianças e bem-sucedidas para todos os alunos? O que nos dizem os resultados da escolaridade matemática sobre a difusão dos benefícios para os alunos? Os sistemas de avaliação e certificação utilizados para a matemática são totalmente benéficos e de forma alguma prejudiciais? A educação matemática é boa para todos ou é menos boa ou mesmo prejudicial para alguns? (Ernest, 2024, p. 4)

Este tipo de questionamento é essencial se pretendemos atingir uma educação intercultural e inclusiva, que celebre a diversidade (Armstrong et al., 2000), onde a escolaridade obrigatória sirva para promover o desenvolvimento e as aprendizagens, em vez de criar bloqueios e frustração aos alunos que necessitam de outras formas de operacionalizar o currículo, ou de outros instrumentos de avaliação. Não se trata de pôr em causa a escolaridade obrigatória, nem a abertura do sistema de ensino a mais alunos. Também não é assumir facilitismos, nem menor grau de exigência científica. Significa é a necessidade de uma profunda reflexão teórica e sobre as práticas, se pretendemos uma educação para todos (Ainscow & César, 2006; César, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b, 2025). Para que isso aconteça, precisamos de conseguir identificar como podemos torná-la relevante para cada aluno, o que tem implícita a necessidade de o conhecer bem, quanto às suas capacidades e competências, características

pessoais, necessidades e interesses, nomeadamente as expectativas que tem em relação à sua trajectória de participação ao longo da vida, nos diversos contextos (escolar, profissional, familiar e social). Daí ser tão relevante ter em consideração os MPD (César, 2024b), um ponto de partida fundamental para a promoção do desenvolvimento e da aprendizagem.

Analisando o que é necessário para desenvolver uma educação matemática inclusiva, Baraldi e seus colaboradores (2019) salientam a necessidade de uma sólida formação de professores, mas também alertam para que a responsabilidade de fomentar uma educação inclusiva não pode ser apenas dos professores.

> Os professores têm um papel importante no processo de inclusão, mas não são a única parte importante. A formação prospectiva e contínua do professor que ensina matemática precisa receber recursos financeiros eficazes que foquem cada vez mais na educação inclusiva, não só porque existem leis que assim o determinam. Precisamos ter em mente a ideia de que a responsabilidade da inclusão escolar não deve recair apenas sobre os ombros dos professores. Os professores precisam ser valorizados financeira e estruturalmente, com formação inicial ou contínua, e boas condições de trabalho. (Baraldi et al., 2019, p. 38)

A necessidade de valorização dos professores também é discutida por McLay e Renshaw (2024), nomeadamente quando afirmam que "os professores são simultaneamente considerados como a influência mais importante na aprendizagem dos alunos e, paradoxalmente, como agentes indignos de confiança, em quem não se pode confiar para fornecer resultados de aprendizagem de qualidade" (p. 350). Assim, tal como é necessário valorizar os alunos, em aula, também é urgente valorizar a profissão de professor, principalmente do ponto de vista social e político. Em Portugal, nas últimas décadas, observou-se uma degradação das condições de trabalho dos professores, que não favorece a existência de uma educação intercultural e inclusiva.

Skovsmose (2019), retomando o conceito de paisagem (*landscape*), relaciona-o com a educação inclusiva, através dos encontros, que se podem estabelecer com os outros e com as diferenças, que caracterizam cada ser humano. Assim, afirma que "pensando na educação matemática inclusiva, podemos considerar

paisagens que facilitam o encontro entre as diferenças" (p. 80), ou seja, tarefas de diferentes naturezas, mas abertas, que permitam a investigação conjunta e valorizar as diferenças. Estes encontros são uma componente fundamental da promoção da equidade e da justiça social, que fazem parte de uma educação intercultural e inclusiva. Como sublinhava Strecht (2008), "numa escola, não se aprende apenas, também se vive!" (p. 44), pelo que cada aluno tem de ser acolhido e valorizado nas suas diversas dimensões, incluindo as emocionais, que tantas vezes são esquecidas, quando se fala de aprendizagens matemáticas. Permitir que as diversas dimensões (ex: cognitiva, social, emocional) sejam expressas e se desenvolvam, em aula, é um passo importante se pretendemos valorizar a diversidade e aprender com ela.

Metodologia

O projecto IC tinha como principais objectivos: (1) estudar e promover o trabalho colaborativo e dialógico, em aula e na investigação; e (2) promover uma educação e investigação interculturais e inclusivas (Ventura, 2012). Teve uma duração de 12 anos (1994/95 a 2005/06) e incluía um *follow-up* de 10 anos, terminado, formalmente, em Junho/Julho 2016. No entanto, como continuamos a receber informações destes alunos, que as enviam de forma espontânea, quando o julgam pertinente, informalmente o *follow-up* ainda continua a existir, mas gerido autonomamente pelos alunos. Outros participantes, de forma menos frequente, também nos enviam informações. Apesar de não estarem previstas como fazendo parte do *follow-up*, algumas destas informações permitiram-nos perceber mais aprofundadamente os impactes do projecto IC. Constituem uma forte evidência empírica de como os diversos participantes sentiam que tinham voz(es), que eram escutadas, agindo como participantes legítimos (César, 2009; Lave & Wenger, 1991), nesta investigação. Ilustram como o contrato experimental (Schubauer-Leoni & Grossen, 1993), negociado entre os investigadores, os professores/investigadores, os alunos e demais participantes, distribuía o poder e concebia os alunos como participantes legítimos, algo que eles também assumiam. Esta é uma das características essenciais da investigação intercultural e inclusiva (Allan & Slee, 2008; César, 2009, 2010, 2013b, 2024b; César & Machado, 2024b, 2025).

O *follow-up* tinha três condições, que variavam quanto à dimensão tempo: (1) os alunos respondiam a um questionário anual, durante 10 anos, no final do ano lectivo (Junho/Julho) e seis alunos, de turmas selecionadas, eram também entrevistados nessa data; (2) os alunos respondiam a esse questionário e realizavam as entrevistas ao fim de 5 e 10 anos após participarem numa turma do projecto IC; e (3) isso acontecia apenas uma vez, ao fim de 10 anos. Assim, podiam-se também observar os efeitos de decorrer mais ou menos tempo entre a participação numa turma do IC e o início do *follow-up*, bem como o efeito da frequência desses contactos. Os seis alunos entrevistados em cada turma eram selecionados

no início do ano lectivo. Eram um rapaz e uma menina em cada nível de classificação académica considerado: negativa, média ou elevada, em Matemática, no ano lectivo anterior. Os alunos cujas trajectórias de participação ao longo da vida analisamos neste livro participaram na Condição 1.

Em todas as condições, houve situações em que os alunos nos contactaram de forma autónoma (na escola, presencialmente; por *e-mail*), revelando aspectos importantes para compreendermos mais aprofundadamente os impactes do projecto IC. Estes contactos, voluntários e informais, também foram considerados como parte do *follow-up*. Quando mudavam de escola, ou começavam a trabalhar, foi na Condição 1 que isto mais se verificou (maior quantidade) e também que se prolongou mais no tempo (mais longitudinal), havendo diversos contactos que ainda hoje acontecem. No entanto, um acontecimento inesperado e que impactou fortemente a vida das pessoas em todo o mundo, como a pandemia, fez aumentar os contactos informais, em qualquer uma das condições e nos diversos tipos de participantes. Assim, numa situação de crise, susceptível de gerar ansiedade e dificuldades de diversa ordem, a equipa do IC foi sentida como uma fonte de comunicação e escuta, de apoio e segurança, que os podia ajudar a ultrapassar os obstáculos com que se deparavam, ou a quem queriam comunicar as soluções que tinham tentado implementar e que, de alguma forma, achavam que se relacionavam com o que tinham aprendido naquele projecto, com as vivências que lhe associavam.

A equipa do projecto IC assumiu uma abordagem interpretativa (Denzin, 2002) e recorreu a três *designs* de investigação (Hamido & César, 2009): (1) estudos *quasi-experimentais* (Carvalho, 2001; Monteiro, 2003); projectos de investigação-acção (Mason, 2002); e (3) estudos de caso (Stake, 1995). Numa fase inicial, apenas existiam os *Designs* 1 e 2 (Hamido & César, 2009; Ventura, 2012). Vamos focar-nos nos dados dos projectos de investigação-acção, por serem aqueles que tinham uma intervenção mais nítida, nas práticas, em aula, por parte dos professores/investigadores e investigadores, ou seja, da equipa do IC. Para além disso, como realçam Armstrong e Moore (2004), os projectos de investigação-acção são particularmente adequados à investigação inclusiva.

Um estudo prévio e que assumiu um *design quasi-experimental*, realizado por César (1994), confrontou o trabalho individual vs. trabalho em díade, em

alunos do 7.º ano de escolaridade (equações do 1.º grau a uma incógnita), tendo mostrado que o trabalho em díade (tarefas não-habituais) permitia maiores progressos entre o pré-teste e o pós-teste (tarefas habituais). Este estudo abrangeu todas as turmas de uma escola, em dois anos lectivos consecutivos. Também analisou detalhadamente as instruções de trabalho e iluminou que nem todas eram eficazes para promover as aprendizagens e os desempenhos académicos dos alunos (César, 1994; César et al., 2000). Posteriormente, a partir dos resultados deste primeiro estudo, Carvalho (2001) selecionou apenas as instruções de trabalho mais adequadas e obteve resultados ainda mais nítidos. Também trabalhou com alunos do 7.º ano de escolaridade, da mesma escola, mas num outro conteúdo: estatística. Estes dois estudos informaram o trabalho realizado nos projectos de investigação-acção do IC (Hamido & César, 2009; Machado, 2014; Ventura, 2012), ajudando a definir alguns dos critérios de formação das díades, da natureza das tarefas propostas aos alunos, das formas de avaliação utilizadas e das práticas, em aula, incluindo as regras do contrato didáctico, que era negociado com os alunos (César, 2003, 2009, 2013a, 2013b, 2014, 2017; César et al., 2014; César & Machado, 2025).

No início do projecto IC, todas as turmas eram de Matemática e apenas trabalhávamos com turmas do 3.º ciclo do ensino básico (7.º ao 9.º ano de escolaridade, que então era a escolaridade obrigatória) e do ensino secundário (10.º ao 12.º ano de escolaridade). Posteriormente, turmas do 1.º ciclo (Cristo, 2008; César & Calado, 2010) e do 2.º ciclo do ensino básico, de currículos alternativos (Courela, 2007), bem como do ensino universitário e de cursos profissionais, também participaram no projecto IC (Machado, 2014; Ventura, 2012). A escolha da disciplina de Matemática, para começar este projecto, teve subjacentes dois tipos de razões: (1) sendo esta a disciplina que era mais rejeitada pelos alunos e que apresentava, naquela época, mais insucesso académico, se o projecto IC tivesse efeitos nítidos no empoderamento, auto-estima positiva, desenvolvimento e aprendizagem dos alunos, incluindo os desempenhos matemáticos, seria muito provável que também se conseguissem esses efeitos se ele fosse aplicado noutras disciplinas; e (2) a coordenadora do IC trabalhava na formação inicial e contínua de professores de Matemática, o que a levava a conhecer particularmente bem

esta realidade e a ter contactos profissionais com muitos professores desta disciplina e disciplinas afins (ex: Métodos Quantitativos).

Posteriormente, o IC foi alargado a disciplinas de Ciências (Biologia, Geologia, Física, Química, entre outras), pelo que a equipa, que então já incluía docentes destas disciplinas, elaborou um IACC para as Ciências. Mais tarde, participaram turmas de Português, Línguas estrangeiras, Filosofia, História e Geografia, tendo também sido elaborado um IACC para estas disciplinas (Ventura, 2012). Uma mesma turma raramente era lecionada por mais de dois professores/investigadores do IC, em disciplinas diferentes. O mais habitual era que existisse apenas um professor, de uma disciplina. Isto significa que os resultados obtidos são ainda mais significativos, pois os alunos apenas trabalhavam de forma colaborativa e dialógica numa única disciplina, ou seja, 2h a 6h por semana, consoante a carga horária prevista. No entanto, em algumas escolas, chegaram a existir grupos de Matemática ou de Ciências em que todos os docentes participavam no IC, trabalhando eles próprios de forma colaborativa e dialógica, na preparação das aulas e dos instrumentos de avaliação, bem como na leitura e discussão de artigos científicos, que considerassem relevantes (Ventura, 2012).

Participantes

Os principais participantes são os alunos de cerca de 600 turmas de Matemática (5.º ao 12.º ano de escolaridade), de Portugal (incluindo Madeira e Açores) e Cabo Verde (ilhas de São Vicente e de Santiago), bem como os 69 professores/investigadores que as lecionavam. As turmas tinham um número muito variável de alunos. De acordo com a legislação então em vigor (ME, 1991), as turmas que incluíam alunos com Necessidades Educativas Especiais (NEE), como eram designadas neste documento legal, tinham até 20 alunos, sendo frequente terem entre 10 e 15 alunos. As restantes turmas tinham, em geral, entre 25 e 30 alunos, mas em algumas escolas e áreas do ensino secundário chegaram a ter 42. Por isso, o número de alunos é bastante elevado. Nos currículos em alternativa e em alguns cursos profissionais, as turmas também podiam ser mais reduzidas, mas isso nem sempre acontecia.

Outros participantes incluem os familiares dos alunos, outros agentes educativos daquela escola, quatro psicólogos (que actuavam como investigadores), observadores internos e externos, bem como avaliadores externos, que elaboravam relatórios para as agências de financiamento externo. Os observadores internos participavam no projecto IC, mas íam observar turmas de outras escolas. Os observadores externos eram escolhidos, principalmente, entre professores de Matemática que não acreditavam no trabalho colaborativo e dialógico, na educação intercultural e inclusiva, nem nas práticas e formas de avaliação promovidas pelo IC. Assim, se eles reportassem algo semelhante ao que a equipa do projecto IC descrevia, isso constituía uma forte evidência empírica. A existência de um diversificado leque de participantes permitiu a triangulação das fontes (informantes, ouvidos na 1.ª pessoa), um importante critério de qualidade segundo Allan (2008), Allan e Slee (2008) e Denzin (2002). Para além disso, permitiu também a triangulação dos investigadores, outro relevante critério de qualidade da investigação interpretativa e inclusiva.

Para mantermos o anonimato dos alunos, começámos por usar a primeira letra do seu nome próprio (ex: V. e M., descritos em César, 2003, 2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b; César & Machado, 2024a), ou uma conjugação de duas letras (ex: AM., analisada em César et al., 2014; César & Santos, 2006). Porém, à medida que fomos escrevendo e usando mais turmas, percebemos que não teríamos letras suficientes para que os textos não se tornassem confusos. Por isso, passámos a usar um nome fictício, escolhido pelo próprio aluno (ex: Tatiana e Tomás, descritos em César, 2017; César & Machado, 2024b). Neste livro retomamos a análise de duas díades paradigmáticas, que ilustram percursos semelhantes aos de outros alunos, que também participaram no IC: Díade 1 – o V. e a M., alunos díspares em termos de classificações académicas, em Matemática, mas em que aquele que tinha Nível 1 (o mais baixo), também mobilizava capacidades e competências muito desenvolvidas (Posição 2); e Díade 2 – a Tatiana e o Tomás, com classificações semelhantes (Nível 3, a positiva mais baixa) e capacidades e competências complementares. Estas duas díades ilustram como o conceito de modeladores pessoais de desempenho (MPD) / *personal performance shapers* (PPS) (César, 2024b) pode ser útil na promoção do

empowerment, dos desempenhos matemáticos, do sucesso escolar e da educação intercultural e inclusiva (Figuras 2, 64 e 65).

Como temos muitos dados de cada aluno, recolhidos ao longo de muitos anos, abordá-los em vários artigos permite traçar trajectórias de participação ao longo da vida mais completas, bem como fazer análises mais aprofundadas, usando novos constructos e conceitos que, entretanto, cunhámos, e em que as dimensões tempo, espaço e participação se tornam mais nítidas. Possibilita que os leitores tenham uma visão alargada de como estes alunos evoluíram ao longo dos anos, dos impactes que o projecto IC teve em diversas fases das suas vidas, escolares, profissionais, pessoais e sociais. Permite, ainda, ver a evolução do quadro de referência teórico, que sustenta o projecto IC, da metodologia de investigação e das práticas, ou seja, acompanhar as transições teóricas, na investigação e nas práticas que foram sendo assumidas e que Ventura (2012) estudou em profundidade. Estas transições foram também abordadas por Ventura e seus colaboradores (2013) e constituem um dos aspectos relevantes e característicos do projecto IC. Estarem documentadas é um contributo para a investigação, sobretudo em Educação e quando assume uma perspectiva intercultural, inclusiva e longitudinal.

A equipa do IC trabalhava de forma crítica, dialógica e colaborativa. Daí que, mesmo nos artigos e livros com apenas um autor formal, usemos a primeira pessoa do plural. O que escrevemos é configurado pelo que lemos, discutimos, observámos e pelo confronto de interpretações, uma característica nítida deste projecto e, como assumimos, de uma maneira intercultural e inclusiva de fazer investigação. A investigação em si, bem como a divulgação dos resultados obtidos, são um empreendimento colectivo, colaborativo e dialógico, que precisa de ser negociado em cada momento. Isto significa que as interpretações e a escrita dos artigos são discutidas, não só pelos investigadores, mas também pelos alunos, professores e outros participantes cujos excertos fazem parte do artigo ou livro, algo que ainda hoje acontece, em relação aos professores/investigadores e alunos e, sempre que possível, a outros participantes. Isto torna o processo de escrita e publicação mais lento, mas muito rico e respeitador dos participantes. Não favorece as avaliações de desempenho dos académicos, baseadas em métricas, que valorizam sobretudo a quantidade, mas permite aprofundar e construir

conhecimento mais sólido e fundamentado, algo a que, a muita velocidade de escrita e a rápida mudança para um novo projecto de investigação, não dão origem. Assim, esta foi uma decisão de investigação baseada em princípios inclusivos e interculturais (Allan & Slee, 2008; Armstrong & Moore, 2004; César, 2009, 2013b, 2024b; César & Machado, 2024b, 2025), que pretendia promover o empoderamento de quem participava na investigação, nomeadamente dos alunos, professores/investigadores e investigadores. Foi uma forma de contribuir para que os participantes se sentissem e agissem como participantes legítimos e não como participantes periféricos (César, 2009, 2013b, 2024b; Lave & Wenger, 1991), mesmo em relação à investigação e não apenas nas aulas. Foi uma forma de desenvolver o sentido crítico, a autonomia e a capacidade de intervenção, que era algo que o projecto IC considerava essencial fomentar (Ventura, 2012). Posteriormente, Perret-Clermont e Giglio (2024) também descreveram formas de funcionamento das equipas de investigação baseadas em princípios semelhantes, embora num contexto diferente: o ensino e a aprendizagem da música, nomeadamente no que se refere aos estágios.

Participar na própria investigação era também uma forma de empoderamento, pois os alunos podiam autorizar, ou não, que usássemos um determinado excerto, sugerir outros, bem como concordar ou discordar da interpretação que tínhamos escrito (César, 2013a, 2013b, 2024b). Por vezes, ao lerem um artigo ou capítulo de livro, sugeriam que abordássemos, futuramente, outros excertos, que lhes pareciam interessantes e de que ainda se recordavam. Este processo revelou-se muito enriquecedor, sendo ainda mais exigente do que a triangulação de investigadores mencionada por Denzin (2002), mas correspondendo aos critérios mais exigentes da investigação inclusiva (Allan & Slee, 2008; Armstrong & Moore, 2004). Isto constitui também uma versão mais exigente e respeitadora do que se designa habitualmente por consentimento informado, pois a autorização não se limita a ser dada antes da investigação começar, ela é analisada e retomada em cada artigo ou livro e, ainda, em algumas decisões de investigação. Por isso, valoriza e promove a participação legítima dos vários participantes, tornando-os também decisores da disseminação de resultados da investigação. Assim, a própria investigação é intercultural e inclusiva, algo que Allan e Slee (2008), Armstrong e Moore (2004) e César (2010, 2024b) referem ser essencial para promover

a participação legítima das minorias sócio-culturalmente desvalorizadas, incluindo aqueles que necessitam de AESE (César, 2014; César et al., 2014; César & Machado, 2025).

Instrumentos de recolha de dados

Os instrumentos de recolha de dados incluíam, na primeira semana de aulas, uma tarefa de inspiração projectiva (TIP1), um questionário (Q1) sobre disciplinas que preferiam e menos gostavam, ocupação de tempos livres, planos de futuro, ou como se viam enquanto alunos de Matemática (representação social, *Me-position*) e um instrumento de avaliação de capacidades e competências relacionadas com a Matemática (IACC), construído pela equipa do projecto IC (Machado, 2014; Ventura, 2012). Estes instrumentos permitiam conhecer melhor os alunos, para se conseguirem adequar as tarefas matemáticas, propostas em aula, às suas capacidades, competências, interesses e necessidades, algo essencial para promover o sucesso escolar e o empoderamento, bem como uma educação intercultural e inclusiva.

O IACC é um instrumento desenvolvimentista (Machado, 2014), que subscreve a noção de que as capacidades e competências, tal como as aprendizagens, se desenvolvem ao longo da vida, sendo configuradas pelas interacções sociais que se estabelecem. Assim, não segue uma abordagem psicométrica. Pretende ver como as respostas evoluem ao longo do desenvolvimento dos alunos, que abordagens dos problemas (global ou passo-a-passo), que raciocínios matemáticos (ex: espacial, geométrico ou analítico) e que estratégias de resolução (ex: aritmética, algébrica, por representação gráfica) os alunos preferem, ou seja, quais as suas formas naturais de interpretar e resolver problemas matemáticos (César, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b; Machado, 2014). Foi elaborado para ser utilizado do 5.º ao 12.º ano de escolaridade. Na sua elaboração participaram membros da equipa do projecto IC e muitos outros professores de Matemática (Machado, 2014; Ventura, 2012).

A necessidade de o conceber fez-se sentir no estudo de César (1994), por esta se ter apercebido que havia uma forte discrepância entre as classificações

académicas obtidas pelos alunos, em Matemática, e os desempenhos que eles tinham, em tarefas matemáticas relacionadas com as equações, mas de outra natureza, mais abertas e inovadoras, que designava por tarefas não-habituais (Anexo 1). Quando questionou vários professores, de diversas disciplinas e anos de escolaridade, estes também consideraram que demoravam muito tempo a conhecer os alunos, quanto às suas potencialidades, o que não favorecia a promoção do sucesso académico. Para além disso, não existia nenhum instrumento de avaliação que permitisse aos professores conhecer as capacidades e competências dos alunos, relacionadas com a disciplina que lecionavam, desde a primeira semana de aulas. Isso era necessário para tomarem decisões quanto às práticas, em aula, que favorecessem o seu desenvolvimento, aprendizagem e acesso a melhores desempenhos matemáticos. Por todas estas razões, tornava-se urgente elaborá-lo. Mas pretendia-se um instrumento que pudesse ser usado, de forma autónoma, pelos professores, desde que estes fizessem uma formação prévia para o saber utilizar e interpretar, bem como para saber tomar decisões sobre como formar as díades, que tipo de tarefas selecionar, adaptar ou elaborar e como conceber um processo de avaliação dos alunos que fosse coerente com aquele novo contrato didáctico (Machado, 2014; Ventura, 2012). Isto significava, para além da necessidade de elaborar o IACC, a de preparar acções de formação e cursos para os professores que o quisessem vir a utilizar, desenvolvendo práticas de trabalho colaborativo e dialógico, em aula.

O IACC, usado pelos professores/investigadores que leccionam Matemática, ou disciplinas afins (ex: Métodos Quantitativos, Estatística), é constituído por cinco tarefas, cada uma delas vocacionada para avaliar determinadas capacidades e competências. A Tarefa A destina-se a avaliar o sentido crítico e a interpretação de informação, nomeadamente em relação a dados matemáticos incluídos numa notícia de jornal. A Tarefa B pretende avaliar a intuição matemática, a persistência na tarefa e a criatividade. A Tarefa C avalia o raciocínio lógico (raciocínio concreto ou abstracto). A Tarefa D permite ver o tipo de raciocínio que os alunos preferem (geométrico ou analítico), bem como confirma o raciocínio lógico, avaliado na Tarefa C. A Tarefa E possibilita saber o tipo de abordagem aos problemas (global ou passo-a-passo) que é preferencial, assim como analisa a conexão entre conhecimentos matemáticos e vida real (compras e vendas,

utilizando dinheiro, bem como noções como lucro e prejuízo). Estas tarefas tiveram diversas versões ao longo dos anos (Machado, 2014; Ventura, 2012). Por exemplo, quando, em Portugal, se passou a utilizar euros, a Tarefa E, que mencionava "contos", na época em que a moeda era o escudo, teve de ser adaptada. As diversas versões dos enunciados do IACC podem ser consultadas em Machado (2014), incluindo algumas adaptações que tiveram de ser feitas noutros países, por motivos culturais. Isso ilustra que não basta fazer uma tradução, é necessária uma adaptação e aferição, em função das culturas a que aquele instrumento se destina. As instruções do IACC pedem, explicitamente, que os alunos expliquem como pensaram. Por isso mesmo, eles não podiam usar máquinas de calcular, pois observava-se que, quando a elas recorriam, muitos passos da resolução não apareciam explicitados, impedindo que as abordagens, raciocínios e estratégias de resolução fossem identificados.

Durante a sua elaboração, foram experimentadas várias ordens de apresentação das tarefas e percebemos que, quando a que agora designamos por Tarefa A, era a primeira, era quando menos alunos rejeitavam responder ao IACC. Apesar da Tarefa A ser a que menos alunos resolvem de forma completa e fundamentada, por ser uma notícia de jornal, parece-lhes mais simples e menos relacionada com a Matemática escolar, levando-os a aderir-lhe mais facilmente. Esta questão é muito relevante, mas tantas vezes esquecida pelos professores e investigadores: o grau de dificuldade de um instrumento de avaliação, seja de capacidades e competências, ou de conhecimentos, varia em função da ordem de apresentação das tarefas. Analisarem aspectos como este, em termos de avaliação, desenvolveu a consciência epistemológica dos professores/investigadores (César, 2008, 2010; César et al., 2014), tornando-os mais capazes de construírem instrumentos de avaliação elaborados com critérios pedagógicos rigorosos, exigentes, mas também adequados às turmas e anos de escolaridade que lecionavam.

A ordem de exploração das resoluções dos alunos, durante a discussão geral (grupo turma) do IACC, começa pela tarefa em que mais alunos conseguiram ser bem-sucedidos, de forma a motivá-los. Em todas as turmas a Tarefa C é aquela que mais alunos conseguem responder com sucesso. Daí ser a primeira a ser explorada, pois pretende-se começar por convidar a ir ao quadro aqueles que acertaram menos resoluções, mostrando-lhes logo que fizeram algo digno de ser

registado pelos colegas e que vale a pena participarem nas aulas de Matemática, estando atentos e registando o que é escrito no quadro. Estas mensagens implícitas constituem mecanismos de *inter-empowerment* poderosos, contribuindo para motivar os alunos e promover a auto-estima (académica) positiva. Para convidar todos os alunos a irem ao quadro e resolverem uma tarefa em que tiveram sucesso, muitas vezes cada um explica uma parte da tarefa, ou um desenha-a e outro explica-a (Machado, 2014; Ventura, 2012).

Em todas as turmas, a Tarefa A é aquela que se discute em último lugar. Quando ninguém respondeu de forma completa, usam-se diversos contributos, que permitam chegar à resposta completa, como aconteceu com a Tatiana, o Tomás e a Ana, que discutimos neste livro. A ordem das restantes tarefas, varia consoante as turmas e as resoluções que se obtiveram. Geralmente, a segunda tarefa a ser discutida é a Tarefa D ou a Tarefa E. A quarta é a Tarefa B. Esta descrição mostra como é complexa a análise do IACC, que os professores/investigadores têm de fazer entre a 1.ª e a 2.ª aula (quando as aulas têm 90 minutos cada, havendo duas aulas de Matemática por semana) ou entre a 2.ª e a 3.ª aula (se as aulas forem de 50 minutos cada, existindo quatro aulas por semana). Muitas escolas passaram de aulas de 50 minutos, para aulas de 90 minutos, ao longo dos anos. Por isso, a turma do V. e da M. tinha aulas de 50 minutos e a da Tatiana e do Tomás, de 90 minutos, embora fossem da mesma escola, mas de anos lectivos diferentes. Para que a discussão geral seja produtiva e passe a mensagem implícita que pretendemos – todos conseguem aprender Matemática e produzir resoluções dignas de serem registadas pelos colegas – a discussão geral tem de ser cuidadosamente preparada previamente, para decorrer de forma fluida, serena e organizada. Para que isso seja possível, a equipa do projecto IC preparou um conjunto de instrumentos de registo (César et al., 2014; Machado, 2014; Ventura, 2012), que ajudam os professores e professores/investigadores a decidir quem vai ao quadro em cada momento, que tarefa ou parte da tarefa vai resolver, bem como as primeiras díades que formam em cada turma.

Outros instrumentos de recolha de dados incluíam mais questionários (Q), entrevistas semi-directivas (E), registadas em áudio e integralmente transcritas, tarefas de inspiração projectiva (TIP), relatórios de observadores internos (RI) e externos (RE), relatórios de avaliadores externos (RAE), conversas informais

(CI), presenciais, por *e-mail* ou outros meios digitais, documentos (D), diários de bordo dos professores/investigadores (DB) e observação (O), que podia ser registada em vídeo e/ou em áudio, sendo depois integralmente transcrita, ou registada por escrito pelos investigadores, professores/investigadores, observadores internos ou externos, ou avaliadores externos. A variedade dos instrumentos de recolha de dados permitiu a triangulação dos instrumentos, um importante critério de qualidade do paradigma interpretativo (Denzin, 2002; Hamido & César, 2009).

Procedimentos

Os procedimentos de recolha de dados incluíram a consulta de documentos (ex: Projecto Educativo de Escola) ou de processos dos alunos que o justificassem (ex: alunos que precisam de AESE, ou com formas de actuação muito disruptivas, que deram origem a relatórios e/ou suspensões, nos anos lectivos anteriores). Esta recolha era efectuada em Junho/Julho do ano lectivo anterior à turma ser lecionada por um professor/investigador do IC, salvo quando isso era impossível (ex: professores que mudavam de escola e só sabiam a colocação mais tarde; professores estagiários). Se isso acontecia, a recolha documental era feita assim que estavam colocados (primeiras duas semanas de Setembro) e antes de começarem as aulas (meados de Setembro).

Na primeira semana de aulas, nas turmas que participavam no IC pela primeira vez, não eram lecionados conteúdos. Essa semana era destinada a conhecer os alunos e a começar a usar os primeiros mecanismos de *inter-empowerment*, bem como a passar algumas mensagens implícitas relevantes. Nesta semana, os alunos respondiam à TIP1, ao Q1 e ao IACC (1.º dia de aulas, se fossem aulas de 90 minutos; 1.ª e 2.ª aulas, se fossem de 50 minutos) e, na aula seguinte, cada aluno ia ao quadro explicar uma estratégia de resolução de uma tarefa, ou parte de tarefa, em que tivesse sido bem-sucedido (César, 2009, 2017, 2024b; Machado, 2014; Ventura, 2012). A mensagem implícita era poderosa: todos são capazes de fazer Matemática e de usar uma estratégia de resolução suficientemente interessante para ser registada, por escrito, pelos colegas (César, 2009; César &

Machado, 2024a, 2024b). Mais tarde, em conversas informais, entrevistas, questionários e, até, quando discutíamos excertos usados em artigos e livros, os alunos mencionaram, repetida e veementemente, como esta aula tinha sido um ponto de viragem para eles, como lhes tinha mostrado algo que eles não julgavam ser possível (César, 2009, 2013a, 2013b, 2017, 2024b; César & Machado, 2025).

A primeira entrevista (E1), aos seis alunos selecionados para serem entrevistados durante o *follow-up*, decorria enquanto aquela turma ainda era lecionada por um professor/investigador do projecto IC: no final do 1.º período (meados de Dezembro). A E2 era realizada no final desse ano lectivo (Junho/Julho). A turma do V. e da M. só participou no projecto IC durante o 9.º ano de escolaridade, pelo que a E1 e a E2 foram realizadas nesse ano (1997/98) e as restantes entrevistas (E3, 10.º ano de escolaridade, até à E12, ambos já empregados), durante o *follow-up*. Se as turmas tinham continuidade pedagógica, ou seja, se eram lecionadas por um professor/investigador durante um ciclo (ex: 7.º ao 9.º ano de escolaridade; 10.º ao 12.º ano de escolaridade), a E3 seria novamente em Dezembro e a E4 em Junho/Julho. A turma da Tatiana e do Tomás foi acompanhada do 7.º ao 9.º ano de escolaridade (3.º ciclo do ensino básico), sendo as E1 a E6 recolhidas nestes anos e as seguintes (E7, 10.º ano de escolaridade até à E16, ambos empregados), durante o *follow-up*.

Teríamos preferido que todas as turmas fossem lecionadas durante um ciclo. Mas os professores mais jovens tinham de concorrer todos os anos, muitas vezes mudavam de escola e nem sempre era possível existir continuidade pedagógica. Para contornar esta dificuldade, em algumas escolas onde supervisionávamos estágios em anos lectivos consecutivos, conseguimos que a turma participasse no IC durante um ciclo, mas com um estagiário diferente em cada ano de escolaridade, o que era uma aproximação do que seria a continuidade pedagógica, pois existia coerência pedagógica por parte dos professores/investigadores que participavam na equipa do IC. Mas convém realçar que, apesar de ser isso que desejaríamos, terem existido turmas que só participaram no IC durante um ano lectivo e que, mesmo assim, relatam tantos impactes desta participação, torna mais fortes as evidências empíricas. Isso mesmo relatam César (2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b) e César e Machado (2024a), quando analisam a trajectória de participação ao longo da vida do V. e da M., que retomamos neste livro.

Todas as turmas respondiam ao Q2 e à TIP2 em inícios de Janeiro, na 1.ª aula após as férias de Natal. Nesta aula, os alunos podiam escolher se queriam continuar a trabalhar colaborativa e dialogicamente, ou não. O mesmo acontecia no final do ano lectivo, se a turma tivesse continuidade pedagógica. Nenhuma turma escolheu deixar de trabalhar colaborativa e dialogicamente, em díade ou pequenos grupos, o que significa que também escolheram manter as formas de avaliação utilizadas no projecto IC, que eram bastante exigentes (César, 2009; César et al., 2014; Machado, 2014; Ventura, 2012). Os restantes instrumentos de recolha de dados eram utilizados durante todo o ano lectivo. Os observadores externos começavam a fazer observações a partir de Outubro/Novembro, ou seja, um mês ou dois depois das aulas terem começado, para que a relação entre os alunos e o professor/investigador já estivesse consolidada e as regras do contrato didáctico tivessem sido negociadas com os alunos (César, 2009, 2013a; César et al., 2014).

O tratamento e análise de dados baseava-se numa análise de índole narrativa (Clandinin & Connelly, 1998), que permitia traçar as trajectórias de participação ao longo da vida, na escola e noutros contextos. Esta análise permitiu estabelecer categorias indutivas de análise (César, 2009, 2013b; Hamido & César, 2009). Começava por uma leitura flutuante, que depois era aprofundada em leituras sucessivas, identificando padrões e discutindo interpretações com os diversos investigadores. Este tipo de análise permitiu cunhar constructos e conceitos de forma indutiva, uma vez que estes emergem da própria análise de dados, como o de mecanismos de *inter-* e *intra-empowerment* (César, 2009), trajectória de participação ao longo da vida /*life trajectory of participation* (César, 2009), ou dinâmicas regulatórias de participação Escola/Família / *regulatory dynamics of participation School/Family* (César, 2013b). Alguns novos constructos e conceitos só foram cunhados durante a meta-análise, ou seja, a partir de 2016, pois emergiram quando se analisou a totalidade do *corpus* empírico. Tratando-se de um *corpus* empírico muito extenso e rico, ainda continuamos a realizar este trabalho. A pandemia (2020 e 2021) não permitiu que nos reuníssemos presencialmente, dificultando este processo. Mas retomámos a meta-análise, com encontros presenciais, assim que foi possível, bem como a escrita e divulgação de resultados. Estes novos constructos e conceitos iluminam a importância de se fazer uma

meta-análise dos dados do IC: (1) o constructo de mediação cultural bi-unívoca (César, 2017); (2) as relações entre a L1 e as formas naturais de fazer e aprender Matemática (César, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b; Meyer, Prediger, César, & Norén, 2016); e (3) o conceito de modeladores pessoais de desempenho (MPD)/ *personal performace shapers* (PPS) (César, 2024b).

Nas figuras referentes à resolução do IACC e das tarefas propostas, em aula, usámos a grafia e figuras originais, quando a qualidade da imagem era elevada, permitindo a sua leitura, e optámos por as elaborar em computador, quando isso não acontecia. Nos excertos, a utilização de reticências significa uma pausa breve, (...) uma pausa mais longa e, quando usamos [...] quer dizer que há uma parte da interacção ou do relato que foi omitida por não ser relevante para aquela interpretação, por ser demasiado longa ou repetitiva, ou por conter algo que o aluno em causa pediu que fosse omitido, por ser demasiado pessoal. Se existe informação que aparece entre parêntesis rectos, trata-se de algo acrescentado pela investigadora e que é útil para a interpretação dos leitores: detalhes referentes ao tom de voz, ao que se observou (ex: sorriu, abanou a cabeça afirmativamente), ou qualquer outra informação relevante. Quando se trata de excertos registados em áudio ou vídeo, em aula, optámos por numerar as falas para facilitar a interpretação de resultados. Em cada episódio interactivo, começámos novamente a numeração das falas (Fala 1 e assim sucessivamente). Para facilitar a leitura, intercalámos os excertos da interacção com a interpretação da mesma, realçando os aspectos mais relevantes em cada parte do processo interactivo. Assim, a divisão em partes, é da responsabilidade dos investigadores, mas também foi discutida com os alunos e professor/investigador que nela participaram. De acordo com a interpretação elaborada, esta divisão pode ser alterada, em diferentes artigos e capítulos de livro, que abordam conceptualizações distintas.

A pandemia deu-nos acesso a dados que não tínhamos previsto, como os que se relacionam com a forma como os alunos reagiram às dificuldades dessa situação inesperada, visto que muitos deles nos escreveram *e-mails* ou nos contactaram por vídeo chamada (*online*), relatando dificuldades, dúvidas e pedindo opiniões, contando-nos formas de organização para se entreajudarem, ou capacidades e competências a que recorreram para ultrapassar as dificuldades que foram surgindo. Foi algo que não estava previsto, mas que enriqueceu a

compreensão dos impactes do IC e que iluminou, de forma clara, como passados tantos anos, eles ainda mantinham relações próximas com alguns colegas, comunicavam esporadicamente com quase todos eles nas redes sociais, contavam uns com os outros quando havia dificuldades e recorriam às novas tecnologias para trabalharem colaborativa e dialogicamente. Tendo já terminado o *follow-up*, foi significativo que nos tivessem contactado, relatando essas vivências e procurando ajuda, em alguns detalhes. Estes são impactes que vão muito além do que tínhamos previsto, quando concebemos o projecto IC, mas que mostram como participar nele impactou as trajectórias de participação ao longo da vida destes alunos e as dos próprios investigadores.

Resultados

Diferentes línguas maternas (L1), diferentes formas de fazer e aprender Matemática

Machado (2014), na tese de doutoramento, analisou a totalidade das respostas ao IACC de Matemática (cerca de 600 turmas, 5.º ao 12.º ano de escolaridade), para estabelecer padrões de desempenho para cada tarefa, hierarquizando-as do ponto de vista das capacidades e competências que eram mobilizadas. Sendo este o objectivo daquele trabalho, não confrontou os desempenhos obtidos em função da L1, pelo que não identificou diferenças na maneira de abordar e resolver tarefas matemáticas que fossem configuradas pela língua materna. Foi César (2014) que, pela primeira vez, por ter já analisado muitas das turmas que participaram no IC, brevemente abordou este assunto. Posteriormente, ao iniciar a meta-análise da totalidade dos dados do projecto IC, fundamentou-o empiricamente de forma mais alargada e relatou-o num evento científico internacional, mencionando-o brevemente num artigo publicado nas respectivas actas (Meyer et al., 2016). Na meta-análise dos dados do projecto IC, ao analisar as resoluções das tarefas do IACC em função da L1, tornou-se nítido que a L1 configurava a abordagem aos problemas, o raciocínio matemático e a estratégia de resolução preferenciais. Estas diferenças na maneira de aprender e fazer Matemática só muito recentemente foram conceptualizadas e divulgadas de forma mais aprofundada, recorrendo a diversos exemplos (César, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b). Sendo uma questão muito relevante, pelos impactes que tem nos desempenhos e aprendizagem dos alunos, na sua auto-estima enquanto aprendentes e na trajectória de participação ao longo da vida que decidem traçar, este tema deveria ser abordado na formação inicial e contínua de professores.

A meta-análise das resoluções das tarefas do IACC mostra que as respostas dos alunos cuja L1 é uma língua ideográfica (ex: crioulo de Cabo Verde) e aqueles cuja L1 é uma língua fonética (ex: português, inglês, entre outras) se

distribuem de forma semelhante pelos diversos padrões de desempenho referidos por Machado (2014). Por isso, a L1 não configura o nível de sucesso obtido no IACC. O que se observa é que os alunos cuja L1 é uma língua ideográfica, preferem uma abordagem global dos problemas, raciocínios espaciais ou geométricos e estratégias de resolução baseadas numa representação gráfica (esquemas, desenhos, gráficos de barras e circulares, entre outras). Battista (2007) define raciocínio espacial como "capacidade de 'ver', examinar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações, envolvendo gerar e analisar imagens, transformar e operar com imagens, e colocá-las ao serviço de outras representações mentais" (Battista, 2007, p. 843, aspas no original). Analisando o que é um raciocínio espacial de forma mais completa, pois distinguem compreender (mental) de transformar (físico), Davis, Okamoto e Whiteley (2015) apresentam uma definição de raciocínio espacial assente em duas componentes: (1) compreender, mentalmente; e (2) transformar, fisicamente. Compreender comporta os seguintes processos: (a) percecionar (adotar uma perspetiva, visualizar, imaginar, tatear...); (b) interpretar (construir diagramas, modelar, comparar, relacionar...); e (c) (des)construir (compor e decompor, organizar e reorganizar, segmentar...). Transformar inclui processos como: (x) mover (deslizar, rodar, refletir, equilibrar); (y) situar (mudar de dimensão, localizar, orientar, intersetar...); e (z) alterar (dilatar e contrair, distorcer e dar forma, dobrar...). Assim, quando desenham as canecas, na Tarefa B, do IACC, quando o V. recorre a uma estratégia de simplificação, por manipulação de variáveis (Anexo 1), ou quando a Tatiana desenha o esquema com que resolve o problema dos apertos de mão, estão a usar um raciocínio espacial. Analisam imagens, desenham-nas e operam com elas, mas não estão a recorrer a raciocínios geométricos. Os raciocínios geométricos são usados na Tarefa D, do IACC, quando decompõem a figura, ou no problema do queijo, quando o V. e a Tatiana desenham um círculo e, depois, os sectores circulares que indicam o que foi vendido. Por isso mesmo, concebemos o raciocínio espacial como mais lato do que o raciocínio geométrico, o que corresponde a considerar que todos os raciocínios geométricos são raciocínios espaciais, mas nem todos os raciocínios espaciais são geométricos.

Os alunos cuja L1 é uma língua fonética preferem uma abordagem passo-a-passo, raciocínios analíticos e estratégias de resolução aritméticas, algébricas,

ou pequenas composições matemáticas. Como realçam César (2024b) e César e Machado (2024a, 2024b), a maioria dos professores, em Portugal, tem como L1 o português, preferindo uma abordagem, raciocínio e estratégias de resolução configuradas por essa L1. O mesmo acontece com os autores dos manuais escolares. Por isso, a abordagem global, o raciocínio espacial ou geométrico e a estratégia de resolução por representação gráfica são, geralmente, menos aceites, desvalorizadas e, por vezes, mesmo proibidas, dificultando a aprendizagem dos alunos cuja L1 é uma língua ideográfica e fazendo-os sentir pouco respeitados e valorizados. Para construir conhecimento matemático, é preciso partir das abordagens, raciocínios e estratégias de resolução que são naturais para aquele aluno. Isso facilita que, depois, ele consiga aprender outras, diferentes. Para além disso, os professores, ao não considerarem legítimas estas formas de fazer Matemática, também não se apercebem de muitas das capacidades e competências destes alunos, nomeadamente em aula e nos seus desempenhos matemáticos, levando-os ao insucesso, em vez de promoverem o acesso ao sucesso escolar. Uma educação intercultural e inclusiva precisa de respeitar e valorizar as diversas formas de fazer e aprender Matemática, pois só assim se promove a equidade e a justiça social.

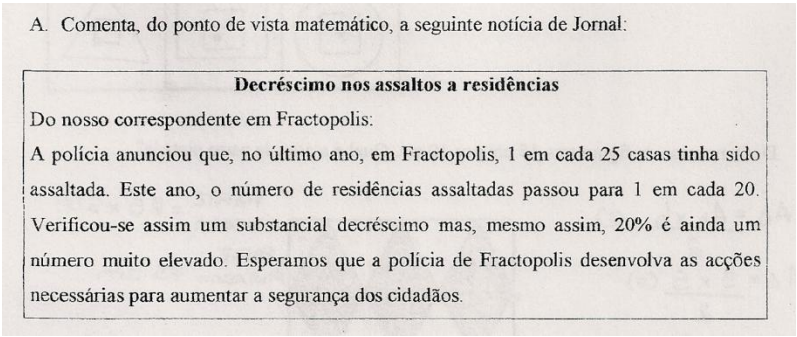
Tarefa A

A Tarefa A (Figura 3) avalia o sentido crítico em relação a informação matemática inserida em notícias, algo particularmente importante na época actual, onde existem tantas notícis falsas (*fake news*). Sendo uma notícia de um jornal, ou seja, algo que faz parte do quotidiano, raramente era rejeitada, mesmo pelos alunos que detestavam Matemática, pois não era percebida como uma tarefa de Matemática escolar. Daí ter sido escolhida para primeira tarefa do IACC (Machado, 2014). No entanto, esta era a tarefa a que menos alunos respondiam de forma completa, havendo muitos que se limitavam a dar uma opinião (ex: ainda há muitos assaltos), ou a copiar os dados matemáticos escritos na notícia, não revelando sentido crítico, pois estes continham diversas imprecisões (César & Machado, 2024b; Machado, 2014; Ventura, 2012). Por isso mesmo, na aula seguinte, quando se fazia a discussão geral do IACC e todos os alunos íam

mostrar e explicar uma estratégia de resolução bem-sucedida que tinham usado, ou parte dela, em várias turmas foram necessários vários alunos para se obter uma resposta completa (Machado, 2014; Ventura, 2012), como ilustraremos quando analisarmos a discussão geral realizada na turma da Tatiana e do Tomás.

Figura 3

Enunciado da Tarefa A



A. Comenta, do ponto de vista matemático, a seguinte notícia de Jornal:

Decréscimo nos assaltos a residências

Do nosso correspondente em Fractopolis:

A polícia anunciou que, no último ano, em Fractopolis, 1 em cada 25 casas tinha sido assaltada. Este ano, o número de residências assaltadas passou para 1 em cada 20. Verificou-se assim um substancial decréscimo mas, mesmo assim, 20% é ainda um número muito elevado. Esperamos que a polícia de Fractopolis desenvolva as acções necessárias para aumentar a segurança dos cidadãos.

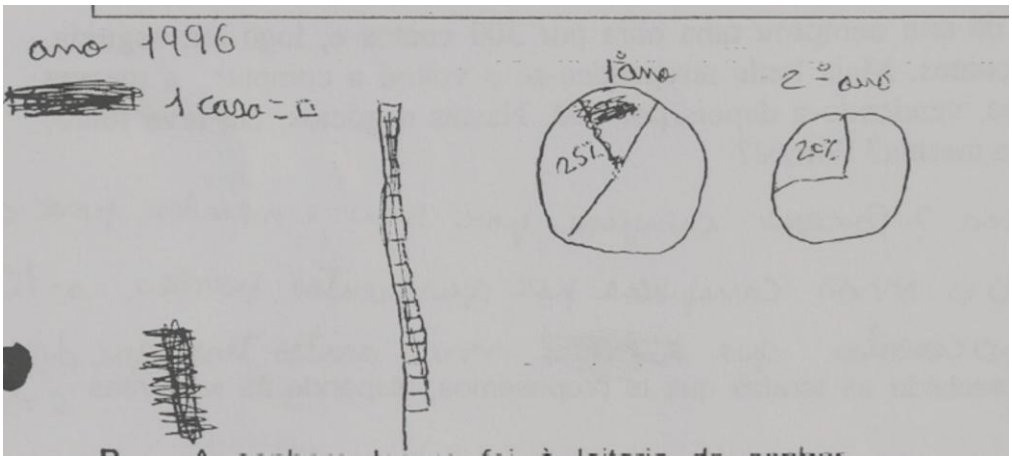
Os alunos sabiam que o IACC se destinava a conhecê-los melhor, para podermos ajudá-los a progredir e adaptarmos as aulas às suas necessidades. Por isso, as suas resoluções não eram tidas em consideração para a avaliação sumativa. Era-lhes dito oralmente, e também estava escrito no IACC, que podiam responder usando qualquer estratégia de resolução: cálculos, desenhos, esquemas, fracções, equações, pequenas composições matemáticas, entre outras, ou seja, que qualquer forma de resolução seria apreciada e aceite. Era-lhes explicado que não podiam usar calculadoras e que deviam explicitar os raciocínios, tornando clara a forma como tinham pensado.

Como revelam César e Machado (2024b), estes diferentes tipos de abordagem, raciocínios e estratégias de resolução também estão presentes nos que não revelaram sentido crítico e também nesses são configurados pela L1, como podemos ver nas Figuras 4 a 10. As resoluções completas, bem como as incompletas, aparecem em todos os anos de escolaridade considerados (5.º ao 12.º ano de escolaridade) e distribuem-se de forma semelhante nos dois géneros. O que varia, quanto aos anos de escolaridade que os alunos frequentam, são alguns conteúdos matemáticos, que apenas são mobilizados quando já foram

previamente leccionados. Mas há alunos do 5.º ano de escolaridade que forneceram resoluções bem-sucedidas e completas em todas as tarefas do IACC, embora isso seja raro, como seria de esperar, tratando-se de um instrumento de avaliação desenvolvimentista (Machado, 2014; Ventura, 2012).

Figura 4

Raciocínio espacial e geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, RC – L1: crioulo



Na Figura 4, o aluno recorre a um raciocínio espacial e geométrico e a duas estratégias de resolução por representação gráfica. À esquerda, utiliza a um raciocínio espacial e tenta que cada quadrado represente uma casa e, depois, esboça o número de casas existentes em 1996, ou seja, no ano em que estava a responder ao IACC. Aqui, denota a necessidade de estabelecer uma conexão com o concreto, ou seja, recorre ao raciocínio concreto (RC), ao considerar o ano em que estava, que não era mencionado na notícia. À direita, utiliza um raciocínio geométrico e esboça dois gráficos circulares, pouco rigorosos, onde assinala a percentagem de casas assaltadas, segundo o que está escrito na notícia. Mas não revela sentido crítico, pois não se apercebe de que os dados da notícia não correspondem a 25% e 20%.

Na Figura 5, o aluno constrói um gráfico de barras que pretende relacionar o número de casas assaltadas (horizontal) com o número de casas considerado (vertical). No entanto, a informação deste gráfico é pouco rigorosa, pois associa

um número racional $\left(\frac{1}{25} \text{ e } \frac{1}{20}\right)$ a uma barra do gráfico, ou seja, representa o numerador no eixo horizontal e o denominador no eixo vertical. Este exemplo revela difculdades na interpretação de um texto que contém dados matemáticos, bem como na conexão entre a mensagem do jornal (língua portuguesa) e a simbologia própria da linguagem matemática. Por isso, como já afirmámos, a L1 tanto configura as resoluções bem-sucedidas, como as que não o são.

Na Figura 6, o aluno baseia-se em alguns dos dados mencionados na notícia para escrever duas fracções, que tenta reduzir a uma dízima finita, sem ser bem-sucedido. Essa falta de rigor também está patente na última linha. Assim, um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética também podem estar associados a uma resolução incompleta e com pouco rigor matemático, como se vê neste exemplo.

Figura 5

Estratégia de resolução por representação gráfica – L1: crioulo

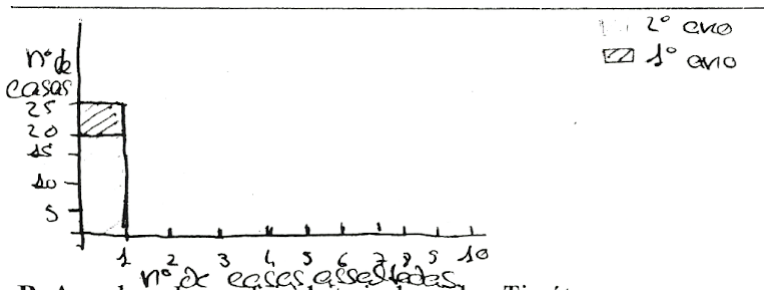
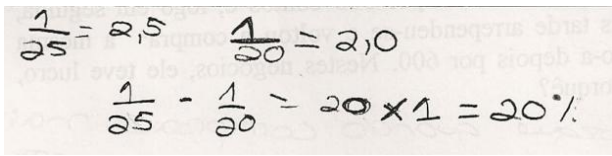


Figura 6

Raciocínio analítico e estratégia de resolução aritmética – L1: português

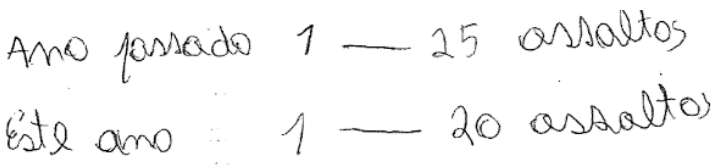


Na Figura 7, esta aluna escreveu na folha de respostas uma parte da informação matemática que era mencionada na notícia: o número de casas assaltadas no ano passado; e o número de casas assaltadas neste ano. Como não

explicita o que pensou, não conseguimos identificar o tipo de raciocínio. Apenas podemos ver um esboço de uma estratégia de resolução aritmética, mas bastante incompleta, pois não revela se os assaltos aumentaram ou diminuiram.

Figura 7

Estratégia de resolução aritmética – L1: português



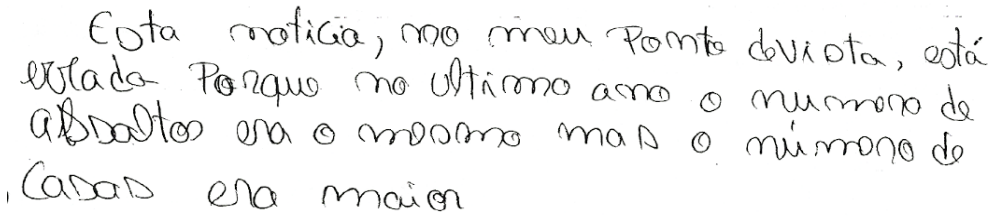
Assim, tanto há alunos que se limitam a repetir o que está escrito na notícia quando recorrem a raciocínios espaciais ou geométricos e a estratégias de resolução por representação gráfica (Figuras 4 e 5), como quando usam um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética (Figuras 6 e 7). Tanto uns, como os outros, não revelam sentido crítico em relação à informação matemática veiculada na notícia, pois não identificaram as imprecisões matemáticas que contém. Esta falta de sentido crítico não está associada a uma L1 específica, pois acontece em todas as consideradas neste estudo.

Vamos focar-nos agora nas resoluções dos alunos que reconhecem que o número de casas assaltadas aumentou, ou seja, naqueles que revelam sentido crítico em relação à informação matemática existente na notícia. Mesmo entre os que não elaboram uma resolução completa, pois não justificam detalhadamente o raciocínio utilizado, há quem reconheça que os assaltos aumentaram (Figuras 8 a 10) ou que há outros dados incorrectos na notícia. Na Figura 8, o aluno utiliza um raciocínio analítico e uma pequena composição matemática como estratégia de resolução. Quando realça que o número de assaltos é o mesmo, mas o número de casas era maior, está implicitamente a fazer uma comparação entre dois números racionais: $\frac{1}{25}$ e $\frac{1}{20}$. Uma vez que os numeradores são o mesmo (1), sendo os denominadores diferentes (25 e 20), há mais assaltos se o denominador for menor. Na Figura 9 também vemos algo semelhante, mas recorrendo a um raciocínio geométrico e a uma estratégia de resolução por representação gráfica,

ilustrando que estas diferenças, configuradas pela L1, aparecem nos vários níveis de respostas obtidas no IACC.

Figura 8

Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática – L1: português



Na Figura 9, o aluno apercebe-se de que os assaltos aumentaram, como escreve na parte inferior esquerda da resolução. No entanto, não explicita claramente como pensou, para chegar a esta conclusão. Vemos que hesita quanto à estratégia de representação gráfica que vai usar, começando por esboçar um gráfico de barras e um circular, que acaba por riscar. Como não está a conseguir mostrar, graficamente, que os assaltos aumentaram, ainda tenta, na parte superior direita, esboçar uma estratégia aritmética.

Como tínhamos explicado que precisávamos de perceber tudo o que tinham pensado, mesmo quando mudavam de estratégia de resolução, podemos observar que o aluno risca, mas de forma a continuar visível o que tinha escrito ou desenhado. Isto mostra que aderiu às regras do novo contrato didáctico (César, 2003, 2009, 2013a; César et al., 2014), sugerido pela professora/investigadora, desde a primeira aula. Revela, ainda, outro aspecto importante: os alunos sentiam-se suficientemente seguros e confiantes, para não se negarem a mostrar uma estratégia que tinham considerado pouco adequada, ou que não dominavam, e que tinham abandonado. Assim, a aula de Matemática já era sentida como um espaço de pensamento (Perret-Clermont, 2004) e começava a construir-se uma comunidade de aprendizagem (Civil, 2007). Isto é de realçar, tratando-se de uma 1.ª aula daquele ano lectivo e de turmas em que muitos alunos rejeitavam a Matemática, apresentando insucesso académico a esta disciplina.

Por último, esboça dois gráficos circulares, com a parte que representa os assaltos: 1 em 24; e 1 em 19. Curiosa a necessidade de recorrer ao raciocínio concreto (RC) e de considerar aquele ano (1998, em que respondeu ao IACC) e o ano anterior (1997). Também interessante é que, apesar de, no esboço, ser maior a parte do gráfico de 1997, ele sabe que os roubos aumentaram em 1998. Logo, apesar de o desenho não ser suficientemente rigoroso para o mostrar, o raciocínio foi mais rigoroso do que a representação gráfica desenhada.

Figura 9

Raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, RC – L1: crioulo

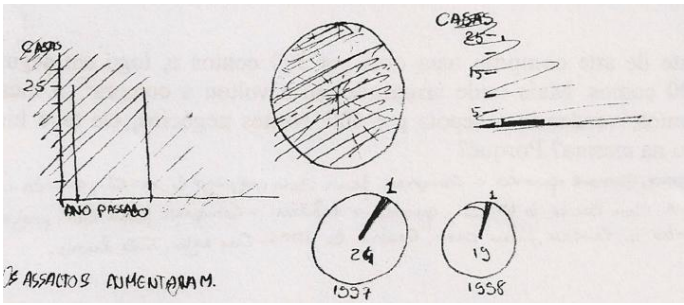
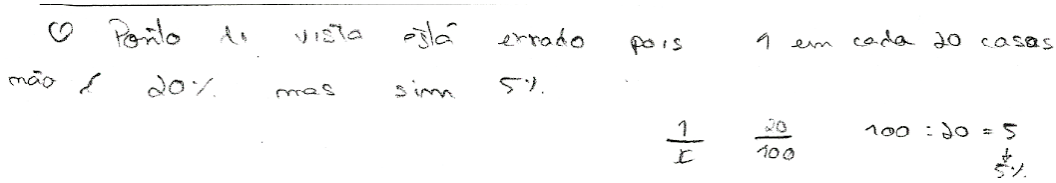


Figura 10

Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática e estratégia algébrica – L1: português



Outras resoluções incompletas revelam conhecimentos matemáticos rigorosos, mas apenas consideram uma parte dos dados mencionados na notícia (Figura 10). Esta aluna reconhece que uma em cada 20 casas não é 20%, mas sim 5%. Porém, como não compara o que aconteceu em cada um dos anos, a resolução fica incompleta. Neste exemplo, a aluna recorreu a um raciocínio analítico e a duas estratégias de resolução: uma pequena composição matemática

e uma estratégia algébrica, pouco rigorosa. Revela sentido crítico, mesmo não tendo fornecido uma resolução completa, pois reconhece que alguns dados da notícia estão errados.

Há duas metáforas mais frequentes e que estão associadas às resoluções que revelam sentido crítico e recorrem a raciocínios geométricos e a estratégias de resolução por representação gráfica: as *pizzas* e os chocolates, sendo a primeira mais frequente do que a segunda. Curiosamente, estas metáforas tanto foram utilizadas por aqueles que costumavam ir a *pizzarias* e comer chocolates, como pelos que não tinham possibilidades económicas para o fazerem, como percebemos nas conversas informais e entrevistas, nomeadamente nas díades que analisamos posteriormente. Alguns exemplos, mais raros, recorrem a outras metáforas relacionadas com a alimentação, como bolos, empadões ou lasanhas, utilizando raciocínios e estratégias de resolução por representação gráfica semelhantes às que ilustramos com as *pizzas* e os chocolates. A metáfora dos terrenos para construir casas foi a menos frequente mas, quando utilizada, esteve associada a resoluções bem sucedidas e completas. Só foi utilizada por alunos cuja L1 era o crioulo.

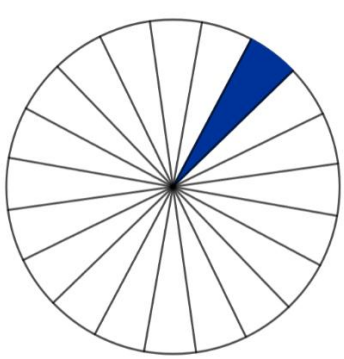
É interessante realçar que as *pizzas* foram, sobretudo, utilizadas quando associadas a estratégias de resolução por representação gráfica (Figura 11). A maioria destes alunos desenhou círculos para representar as *pizzas*, provavelmente porque este é o formato mais habitual das *pizzas*, em Portugal. No entanto, alguns alunos também desenharam *pizzas* rectangulares. No caso de um aluno muito jovem (5.º ano de escolaridade, 10 anos de idade cronológica), o recurso a esta estratégia esteve associado a um raciocínio analítico e a uma estratégia de resolução em que usa uma pequena composição matemática (Figura 12). Como o IACC é respondido na primeira semana de aulas, este aluno ainda não tinha abordado alguns conteúdos matemáticos (ex: percentagens, comparação e simplificação de fracções), que lhe permitissem resolver o problema. Por isso, neste ano de escolaridade, o recurso à metáfora da *pizza* indica um desenvolvimento cognitivo avançado e a mobilização de capacidades e competências como o sentido crítico. Estes dois exemplos ilustram como diferentes tipos de raciocínio e estratégias de resolução podem levar à resolução

do problema e, ainda, como é importante serem explorados em aula, em paralelo, durante a discussão geral.

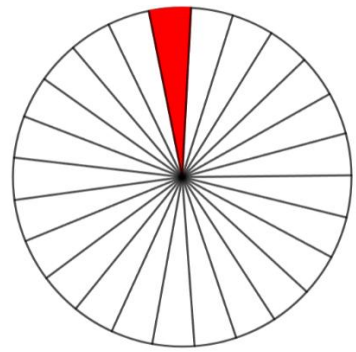
Na Figura 11, uma aluna, cuja L1 é o crioulo, desenha as duas *pizzas* e divide uma delas em 20 bocados e a outra em 25, assinalando em cada uma delas a fatia que come, que coloriu. O rigor do desenho permitia ver que as *pizzas* eram do mesmo tamanho, pelo que ela não sentiu necessidade de o explicitar. Esse rigor também permite visualizar que, se a *pizza* estiver dividida em 20 fatias, a fatia que se come é maior. Mas, mesmo assim, escreveu isso abaixo dos desenhos. De notar que, neste exemplo, ela elabora uma resolução completa porque, depois de usar a metáfora das *pizzas*, escreve a resposta, passando dessa metáfora, para os dados da notícia que constava da Tarefa A. Assim, é uma resolução muito completa.

Figura 11

Raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, complementada com uma composição matemática – L1: crioulo



Pizza dividida em 20 fatias



Pizza dividida em 25 fatias

Como mais se dividir a *pizza* em 20 fatias, do que se for em 25 fatias. Vê-se que a fatia é maior.

R: Houve mais assaltos, porque 1 casa em 20 é mais do que 1 casa em 25. Por isso, a notícia tem informação errada, diz que os assaltos diminuíram.

Na Figura 12, um aluno, cuja L1 é o português, produz uma pequena composição matemática, muito concisa e rigorosa: (1) começa logo por afirmar que os assaltos aumentaram; (2) recorre à metáfora da *pizza* e tem o cuidado de indicar que é a mesma *pizza*; e (3) revela que come mais se a *pizza* estiver dividida em 20 do que se for em 25 bocados.

Figura 12

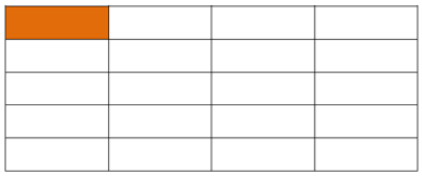
Estratégia de resolução baseada numa composição matemática – L1: português

Os assaltos aumentaram porque se eu comer um bocado de pizza que foi dividida por vinte pessoas, eu como mais que se comer um bocado da mesma pizza que foi dividida por vinte e cinco pessoas.

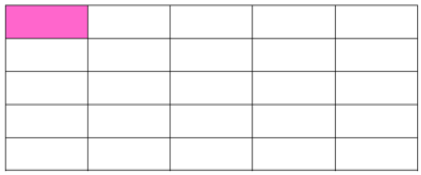
Uma outra aluna, cuja L1 é o crioulo, recorreu à metáfora do chocolate para resolver a Tarefa A (Figura 13). Utilizou um raciocínio geométrico e a uma estratégia de resolução por representação gráfica, tendo sido muito rigorosa na maneira como desenhou os chocolates (usou uma régua), bem como no modo de assinalar o bocado de chocolate que correspondia ao que comia, que coloriu com lápis de cor, escolhendo cores contrastantes (laranja e rosa). Muito interessante, é a passagem da metáfora para a resposta, em que faz a transição do chocolate para os assaltos: "R: Se nos chocolates comia mais se dividisse a tablete em 20 bocados, então houve mais casas assaltadas quando foi 1 em 20. Por isso, os assaltos aumentaram e a notícia está escrita com pouco rigor".

Figura 13

Raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, complementada com uma composição matemática – L1: crioulo



Chocolate dividido em 20 bocados



Chocolate dividido em 25 bocados

Se dividir um chocolate em 20 bocados e outro, igual, em 25, como mais no que dividi em 20.

R: Se nos chocolates comia mais se dividisse a tablete em 20 bocados, então houve mais casas assaltadas quando foi 1 em 20. Por isso, os assaltos aumentaram e a notícia está escrita com pouco rigor.

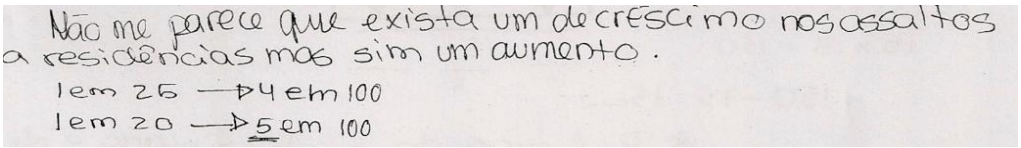
Nesta resposta, não só faz a transição da metáfora para os dados da Tarefa A, também revela muito sentido crítico, ao identificar que os assaltos aumentaram, em vez de diminuirem, como estava escrito na notícia, e ao reconhecer que aquela notícia "está escrita com pouco rigor". Abreu e seus colaboradores (2002) salientam a importância dos alunos conseguirem realizar transições entre os diferentes contextos, onde podem ocorrer as práticas matemáticas, nomeadamente entre a escola (Matemática escolar) e a vida real (Matemática para a vida). Também Zittoun (2006) realça que a capacidade de realizar estas transições tem subjacente a mobilização de mais recursos simbólicos, que podem ser usados também em contextos diferentes, exteriores à escola, o que é uma vantagem para os alunos, na vida futura. Nesta resolução, as transições entre a vida real (chocolates) e a Matemática escolar (Tarefa A) foram muito bem-sucedidas, revelando que esta aluna consegue mobilizar diversos recursos simbólicos.

Outros alunos, cuja L1 era o português, recorrendo a raciocínios analíticos e a estratégias de resolução aritméticas ou algébricas, complementadas com

pequenas composições matemáticas, também reconheceram que os assaltos tinham aumentado (Figuras 14 a 17). Na Figura 14, o aluno usa um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução baseada numa composição matemática, associada a uma estratégia aritmética. Começa por uma pequena composição matemática, onde indica que os assaltos aumentaram. Na estratégia de resolução aritmética passa dos dados do problema para a percentagem (4 em 100; 5 em 100), comparando-as implicitamente, uma vez que conclui que houve um aumento dos assaltos. Esta resolução revela sentido crítico, pois identifica uma informação imprecisa na notícia de jornal e fundamenta, matematicamente, porque considera que houve um aumento de assaltos naquele ano.

Figura 14

Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática e estratégia aritmética – L1: português



Na Figura 15, a aluna utiliza um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética. Simplifica as fracções, usando dízimas finitas. Depois, compara-as, recorrendo ao sinal de menor. Apesar de, na dízima 0.04, o último número ser de difícil leitura, foi isso que ela escreveu. Na discussão geral, quando foi ao quadro explicar esta estratégia de resolução, o número 4 estava desenhado de forma mais clara. Para além disso, quando explicou o que tinha feito, também mencionou essa dízima. Esta é outra questão importante: nem sempre os alunos escrevem os números de forma muito clara, o que reforça a importância de se explorar, na discussão geral, as estratégias de resolução utilizadas e, nas provas de avaliação, se forem escritas, de os professores estarem particularmente atentos a estes detalhes. Neste exemplo, faltou-lhe escrever, de forma nítida, que os assaltos aumentaram, embora isso esteja implícito na resolução efectuada.

Figura 15

Raciocínio analítico e estratégia de resolução aritmética – L1: português

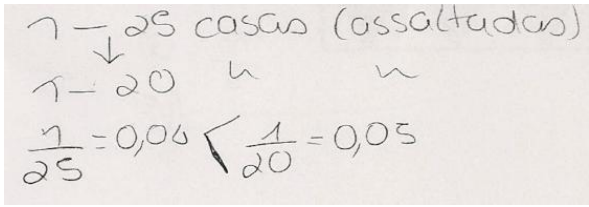
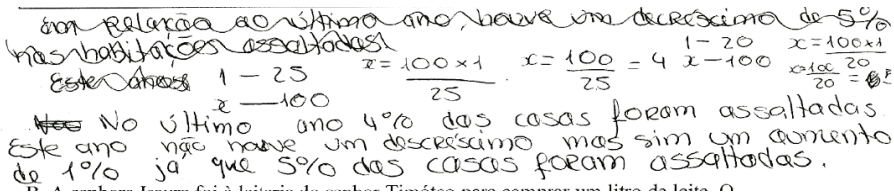


Figura 16

Raciocínio analítico e estratégia de resolução algébrica – L1: português



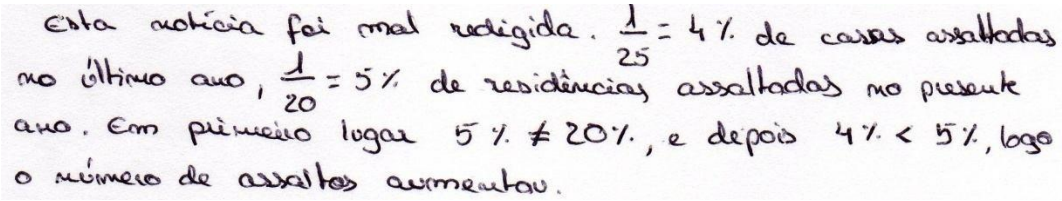
Na Figura 16, a aluna recorre a um raciocínio analítico e a uma estratégia de resolução algébrica, que completa com uma pequena composição matemática, que funciona como uma resposta final. O rigor da estratégia algébrica, em alguns pormenores, é de realçar.

Na Figura 17, temos outro exemplo em que, através de uma estratégia de resolução baseada numa composição matemática, uma aluna explica, detalhadamente, que "esta notícia está mal redigida", usando as percentagens para o provar. Indica que $\frac{1}{25}$ são 4%, $\frac{1}{20}$ são 5%, pelo que houve um aumento de assaltos. Também refere que 5% ≠ 20%, identificando outra informação imprecisa, que consta da notícia. Por último, também reconhece que os assaltos aumentaram. Logo, identifica os três elementos imprecisos da notícia, revelando bastante capacidade de observação e de análise. Esta resposta revela rigor matemático, poder de argumentação e muito sentido crítico em relação à informação matemática mencionada nesta notícia. Numa época em que existem tantas notícias falsas (*fake news*), o sentido crítico em relação ao que se lê e ouve, nos *media*, é uma

competência particularmente importante, que deveria ser desenvolvida nas aulas de Matemática e na Escola, em geral.

Figura 17

Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática – L1: português



A análise dos desempenhos dos alunos na Tarefa A mostra que aqueles cuja L1 é o crioulo de Cabo Verde preferem raciocínios espaciais ou geométricos e estratégias de resolução por representação gráfica, enquanto aqueles para quem a L1 é o português, recorrem, preferencialmente, ao raciocínio analítico e a estratégias de resolução aritmética, algébrica, ou através de uma pequena composição matemática. Para os alunos cuja L1 é o crioulo, habituados a ver estas formas de fazer Matemática desaconselhadas, ou proibidas, foi muito importante que estas fossem aceites e que eles as pudessem mostrar e explicar aos colegas, na discussão geral, vendo que estes as registavam, por escrito. A confiança que sentiram por verem legitimadas diversas formas de resolução, ajudou a criar espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004) e fez a turma começar a funcionar como uma comunidade de aprendizagem (Civil, 2007), em que todos se respeitavam e colaboravam, para um fim comum: aprender Matemática. César (2024b) e César e Machado (2024a, 2024b) iluminaram, através da análise de diversos exemplos, que este respeito e valorização das abordagens, raciocínios e estratégias de resolução naturais são essenciais para promover uma educação intercultural e inclusiva.

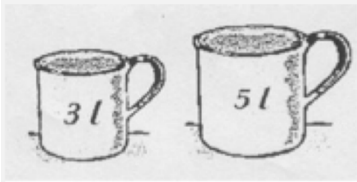
Tarefa B

A Tarefa B (Figura 18) pretendia avaliar a existência, ou não, de intuição matemática, de persistência na tarefa e de criatividade (Machado, 2014; Ventura, 2012). Como referem César (2024b) e César e Machado (2024a), a mobilização da intuição matemática não depende do tipo de raciocínio ou da estratégia de resolução utilizados. Tanto para os alunos cuja L1 é o crioulo, como para aqueles cuja L1 é o português, a percentagem dos que mobilizam intuição matemática é semelhante. Assim, os níveis de sucesso também são semelhantes para estes dois tipos de L1. Mas a persistência na tarefa é mais frequente entre os alunos cuja L1 é o português, enquanto a criatividade aparece mais frequentemente entre os que têm o crioulo como L1. A análise da totalidade das resoluções, à semelhança do que acontecia na Tarefa A, mostra que os alunos cuja L1 é o crioulo preferem raciocínios espaciais e estratégias de resolução por representação gráfica, onde desenham as canecas e indicam os movimentos realizados, através de setas ou de movimentos do líquido, ao ser despejado noutra caneca. Aqueles para quem a L1 é o português, ou outra língua fonética, preferem raciocínios analíticos e uma estratégia de resolução aritmética, por vezes associada a uma pequena composição matemática, onde explicam, através de um texto, os movimentos que teriam de realizar. Por isso mesmo, as formas naturais de resolução da Tarefa B também são configuradas pela L1.

Figura 18

Enunciado da Tarefa B

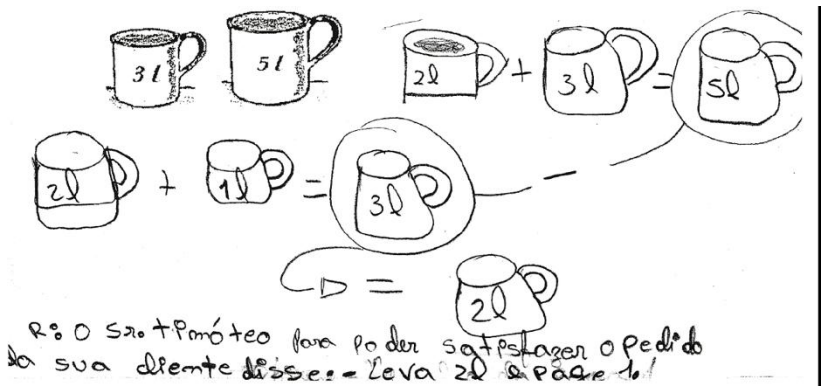
B. A senhora Isaura foi à leitaria do senhor Timóteo para comprar um litro de leite. O senhor Timóteo só tem duas medidas, uma de 3 litros e outra de 5 litros. Como deve o senhor Timóteo fazer para satisfazer o pedido da sua cliente?



Na Tarefa B, os diferentes tipos de raciocínio e estratégias de resolução tanto aparecem quando a resolução é bem-sucedida e está completa, como quando está incompleta, ou não corresponde ao que era pedido. Algo semelhante já tinha sido observado nas resoluções da Tarefa A. Na Figura 19, uma aluna cuja L1 é o crioulo recorre a um raciocínio espacial e a uma estratégia de resolução através de uma representação gráfica, desenhando diversas canecas e servindo-se de símbolos matemáticos (+ e =) para indicar as movimentações do leite. Porém, não revela intuição matemática, pois não percebeu os dois movimentos que lhe permitiriam obter 1 l de leite, nem persistência na tarefa, pois desiste de continuar quando obteve 2 l de leite. Mas revela alguma criatividade: consegue medir 2 l de leite e responde que a cliente levaria essa quantidade pelo preço de 1 l. No entanto, isto não corresponde ao que era pedido no problema, nem seria conveniente para o merceeiro, que teria prejuízo.

Figura 19

Raciocínio espacial e estratégia de resolução por representação gráfica – L1: crioulo



Uma outra aluna, cuja L1 era o português, usou um raciocínio analítico e uma composição matemática como estratégia de resolução. Optámos por transcrever a sua resposta, porque usou uma caneta tão clara, que o que escreveu na folha é pouco nítido. Esta aluna não resolveu o problema respeitando os constrangimentos do enunciado, mas revelou criatividade, pois arranjou uma argumentação válida, para que a cliente levasse 2 l em vez de 1 l: era sábado, a mercearia fechava ao domingo, logo podia fazer-lhe falta mais leite. Neste caso, não

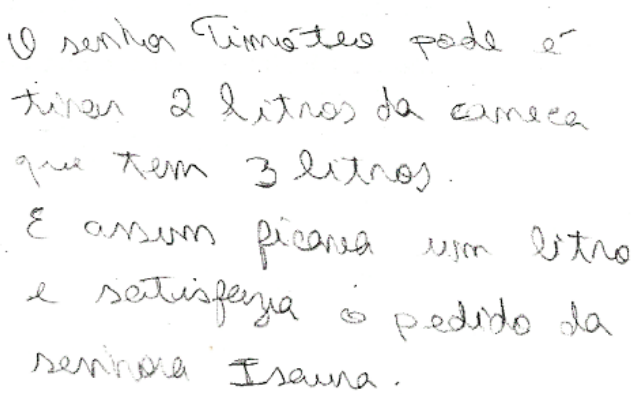
revela intuição matemática, nem persistência na tarefa, mas revela criatividade e capacidade de argumentação, para persuadir a cliente.

> Deve encher a medida de 5 litros e despejá-la na medida de 3 l e diz à Sr.ª Isaura que hoje é Sábado e que aos Domingos está fechado, logo, deve levar 2 litros pois pode fazer falta. (Ana, IACC, Setembro 2003)

Na Figura 20, um aluno cuja L1 é o português recorre a um raciocínio analítico e usa uma pequena composição matemática como estratégia de resolução. Revela saber que retirando 2 l a 3 l se obtém 1 l. Porém, não explica, a partir daquelas duas canecas, como consegue retirar 2 l da caneca de 3 l, ou seja, não explicita a estratégia de resolução utilizada, não revelando intuição matemática, nem persistência na tarefa ou criatividade.

Figura 20

Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática – L1: português

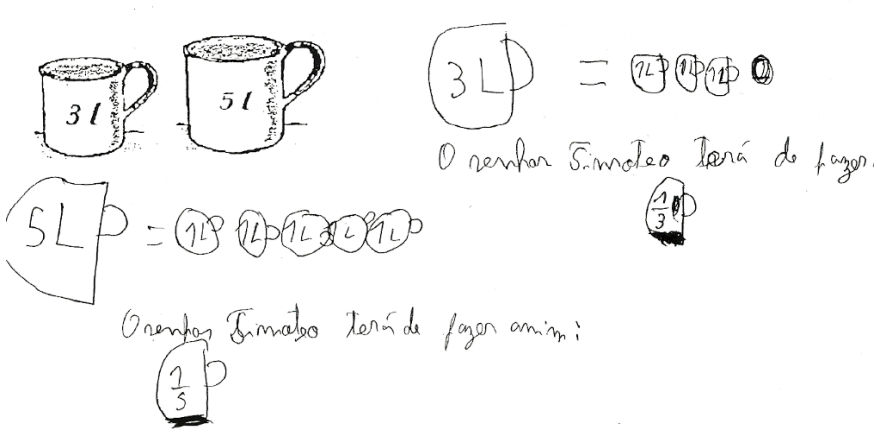


Na Figura 21, um aluno cuja L1 é o crioulo, usa um raciocínio espacial e uma estratégia de resolução baseada numa representação gráfica (desenha as canecas), com um esboço de estratégia de resolução aritmética, para mostrar que, em 3 l, há três vezes 1 l, enquanto em 5 l, há cinco vezes 1 l. Completa escrevendo que 1 l é $\frac{1}{3}$ de 3 l e é $\frac{1}{5}$ de 5 l. Porém, mais uma vez, não explica como vai

medir 1 l com estas canecas, tal como pedido na Tarefa B. É como se pretendesse mostrar que consegue mobilizar alguns conhecimentos matemáticos, mesmo que estes não correspondam ao que é pedido no problema.

Figura 21

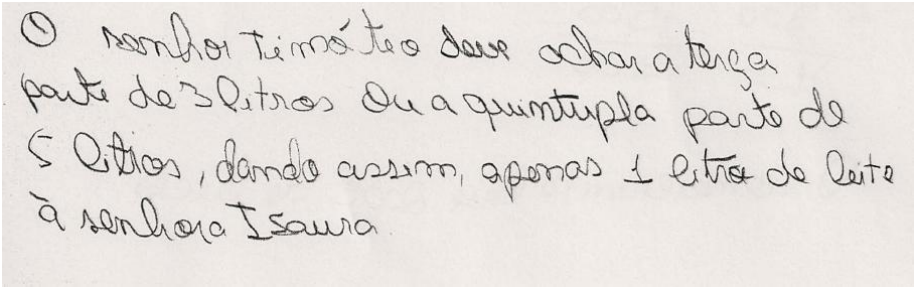
Raciocínio espacial e estratégia de resolução por representação gráfica, com esboço de estratégia de resolução aritmética – L1: crioulo



É curioso notar que esta mesma explicação também é utilizada por alunos cuja L1 é o português, mas recorrendo a uma composição matemática como estratégia de resolução, como acontece no exemplo da Figura 22. Como afirmámos, tanto as resoluções completas, como as incompletas e as que não correspondem ao que era pedido, estão associadas às várias estratégias de resolução e a qualquer uma das L1 consideradas. A L1 configura a abordagem, o raciocínio e a estratégia de resolução, mas não influencia a qualidade dos desempenhos matemáticos.

Figura 22

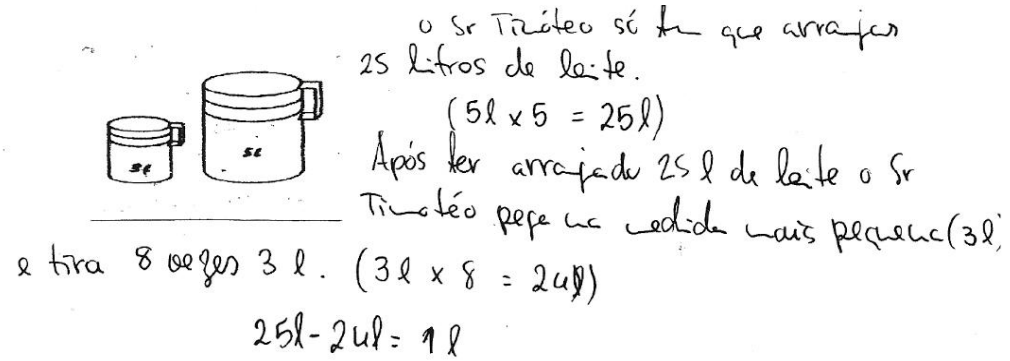
Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática – L1: português



Alguns alunos pressupõem a existência de um recipiente extra, não graduado, para conseguirem resolver a Tarefa B, como se mostra na Figura 23. Este aluno, cuja L1 é o português, recorre a um raciocínio analítico e a uma pequena composição matemática e a uma estratégia de resolução aritmética. Na entrevista, afirmou que não acreditava que, numa mercearia, não existisse um recipiente não graduado. Quando lhe dissemos que um recipiente para 25 l tinha de ser bastante grande, apenas se riu e encolheu os ombros, reconhecendo implicitamente que seria pouco provável existir um recipiente dessa dimensão naquela loja. Este desempenho não respeita os constrangimentos referidos na Tarefa B. Mas revela que o aluno queria responder e mostrar que mobilizava alguns conhecimentos matemáticos, o que pode indicar que estava disponível para resolver tarefas, em aula, e para realizar aprendizagens matemáticas.

Figura 23

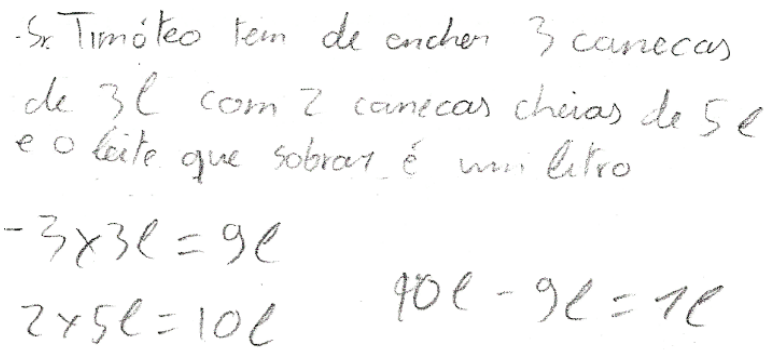
Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática e estratégia de resolução aritmética – L1: português



A Figura 24 ilustra uma resolução onde o aluno não mobiliza intuição matemática, nem persistência na tarefa. É um aluno cuja L1 é o português e que, como estratégia de resolução, usa uma composição matemática, que complementa com uma estratégia de resolução aritmética, utilizando um raciocínio analítico. Os movimentos que indica permitem ficar com 1 l de leite. Porém, não é explicitado, de forma clara, como retira três vezes 3 l (total: 9 l) do conjunto de duas vezes 5 l (total: 10 l), ou seja, não é nítido que movimentos terá de fazer, pelo que a resolução está incompleta.

Figura 24

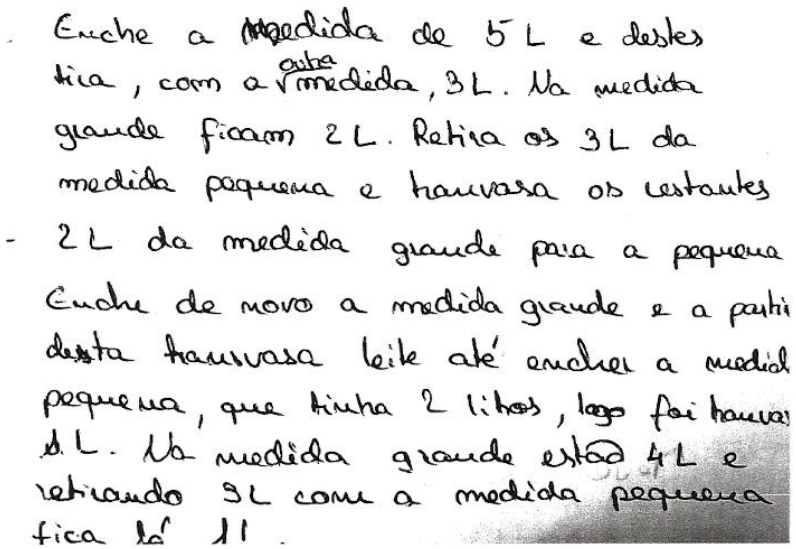
Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática e estratégia de resolução aritmética – L1: português



Dos alunos que elaboraram resoluções completas, uns revelam persistência na tarefa, enquanto outros mobilizam intuição matemática. A Figura 25 ilustra uma resolução onde o aluno, cuja L1 é o português, não mobiliza intuição matemática, mas mostra persistência na tarefa, pois faz muito mais movimentos (oito, no total) do que seriam necessários se tivesse começado por encher a caneca de 3 l (dois movimentos). Mesmo assim, não desiste até ter conseguido completar a resolução e ficar com 1 l de leite na caneca de 5 l. Nesta resolução, ou há leite que é desperdiçado, pois é deitado fora, ou é necessário um recipiente extra, limpo, que não é mencionado no enunciado. Como este tipo de resolução implica muitos movimentos, ou seja, muitos desenhos, quando foi utilizada por alunos cuja L1 é o crioulo, acabou por ser abandonada. Quando isso aconteceu, depois tentaram começar por despejar a caneca de 3 l na de 5 l, percebendo que aí resolviam o problema só com dois movimentos, mais fáceis de representar através de desenhos das canecas.

Figura 25

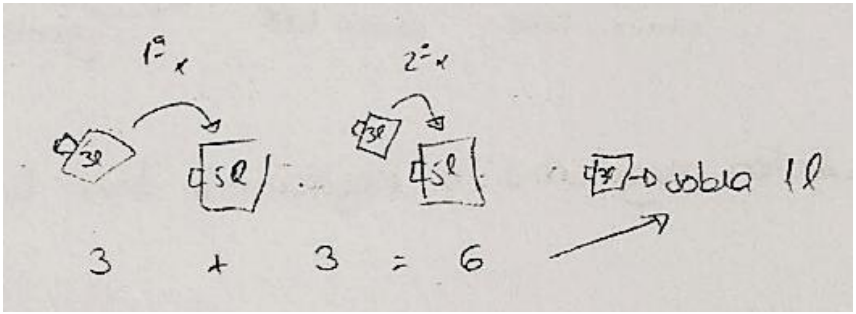
Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática – L1: português



Se os alunos conseguem mobilizar a intuição matemática, bastam dois movimentos para ficarem com 1 l na caneca de 3 l. Na Figura 26, uma aluna cuja L1 é o crioulo, recorreu a um raciocínio espacial e a uma estratégia de representação gráfica, revelando intuição matemática, pois percebeu logo que era melhor começar por encher a caneca de 3 l. Esta representação gráfica é bastante rigorosa, pois numera cada um dos movimentos (1.ª vez e 2.ª vez, indicando vez por um "*x*"), revela os movimentos (despejos) são da caneca de 3 l para a de 5 l e, por fim, indica que na caneca de 3 l sobra 1 l. Por baixo da estratégia de resolução por representação gráfica, usa um esboço de estratégia de resolução aritmética, com uma seta para a representação gráfica, o que indica que a estratégia de resolução aritmética apenas complementa essa mesma representação gráfica, que constitui a sua forma preferencial de resolver o problema.

Figura 26

Raciocínio espacial e estratégia de resolução por representação gráfica, complementada com uma estratégia de resolução aritmética – L1: crioulo



Os alunos que conseguem mobilizar a intuição matemática e cuja L1 é o português, geralmente recorrem a um raciocínio analítico e a uma estratégia de resolução baseada numa composição matemática (Figura 27) ou numa estratégia de resolução aritmética (Figura 28), seguida duma pequena composição matemática. Interessante realçar que, na Figura 27, a aluna tem o cuidado de escrever que fica, aproximadamente, 1 l na caneca de 3 l, pois a medição feita desta maneira não é muito rigorosa.

Figura 27

Raciocínio analítico e estratégia de resolução baseada numa composição matemática – L1: português

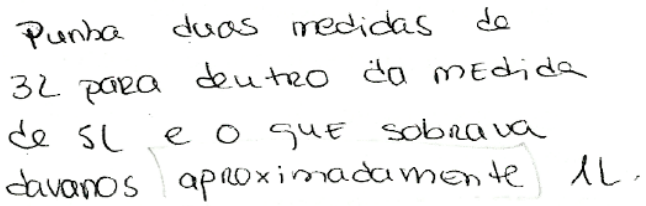
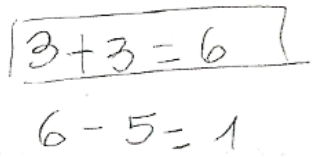

Punha duas medidas de
3L para dentro da medida
de 5L e o que sobrava
davamos aproximadamente 1L.

Figura 28

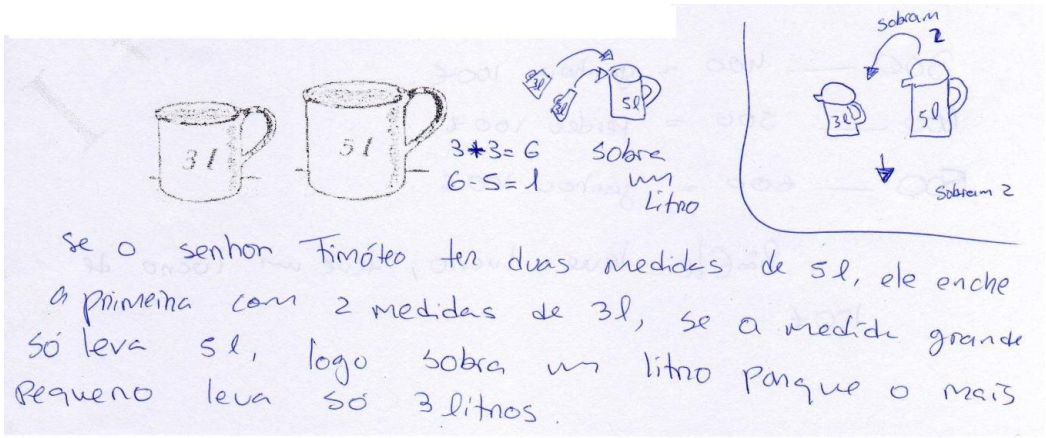
Raciocínio analítico e estratégia de resolução aritmética – L1: português



Ele enche a caneca de 3 l. Faz isso duas vezes e despeja na caneca de 5 l. Fica 1 l na caneca de 3 l.

Figura 29

Raciocínio analítico e estratégia de resolução aritmética, complementada com uma composição matemática e uma representação gráfica – L1: português



Interessante é a resolução duma aluna cuja L1 é o português (Figura 29) e que usa um raciocínio analítico e uma conjugação de estratégias de resolução: aritmética (centro), complementada com uma composição matemática (em baixo) e um esboço de representação gráfica (em cima, centro e direita).

Como, para os alunos cuja L1 é o português, a estratégia de resolução por representação gráfica não é preferencial, apesar de o enunciado da Tarefa B ter os desenhos das canecas e de ela começar por esboçar outros desenhos das canecas e setas, para indicar os movimentos, não considera esta resolução "apropriada para uma aula de Matemática" conforme explicitou na discussão geral do IACC,

quando foi explicar a estratégia de resolução que usou. Assim, rapidamente muda de estratégia de resolução, passando para as que lhes são preferenciais: aritmética e composição matemática.

Tarefa C

A Tarefa C (Figura 30) pretendia avaliar o raciocínio lógico, ou seja, se os alunos mobilizavam o raciocínio concreto (RC) ou o raciocínio abstracto (RA) (Machado, 2014; Ventura, 2012). Ventura (2012) salienta a importância de os alunos conseguirem mobilizar o raciocínio abstracto nas aulas de Matemática.

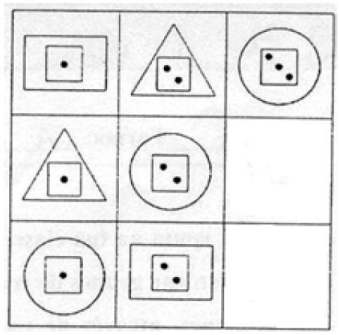
> O acesso ao raciocínio abstracto é muito importante para algumas aprendizagens matemáticas. Conseguir mobilizar esta forma de raciocínio permite que os alunos consigam perceber mais facilmente a linguagem simbólica utilizada em matemática e estabelecer conexões entre diferentes temas, que podem ser úteis quando se procuram resolver diversas tarefas matemáticas. (Ventura, 2012, p. 248)

Como o que era pedido era que esboçassem figuras, não conseguimos identificar as estratégias de resolução se apenas analisarmos as resoluções escritas na folha de respostas. Porém, na discussão geral, realizada na aula seguinte à resolução do IACC, através da explicação de como tinham pensado, conseguimos identificar se tinham usado uma abordagem global da figura, mais frequente quando a L1 é o crioulo, ou uma abordagem linha-a-linha e/ou coluna-a-coluna, mais habitual quando a L1 é o português. Quando o professor/investigador necessitava de informações adicionais sobre a resolução de algum aluno, podia solicitá-las durante uma breve conversa informal (CI), como analisamos posteriormente. Estas explicações adicionais permitiam confirmar o que se observava na folha de respostas, nomeadamente noutras tarefas do IACC. Visto que estes detalhes só apareciam na discussão geral, serão analisados detalhadamente quando nos focarmos nas turmas do V. e da M., ou da Tatiana e do Tomás.

Figura 30

Enunciado da Tarefa C

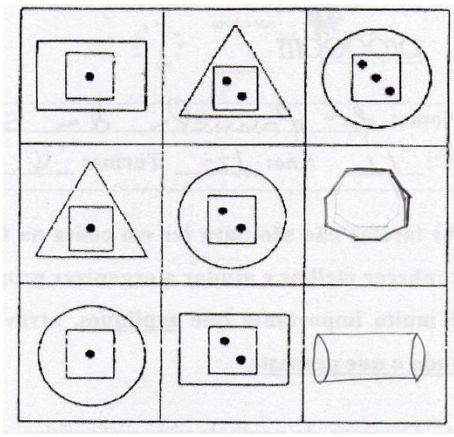
Tarefa C – Esboça as figuras que faltam



Sendo o quadrado central uma figura que aparece sempre, esta é a mais fácil de identificar. Por isso mesmo, quando ela está omitida ou quando é substituída por outra figura geométrica, é necessário analisar cuidadosamente o que aconteceu, percebendo se foi motivado por um comprometimento cognitivo, visual, uma distração momentânea ou por outro motivo.

Figura 31

L1: português

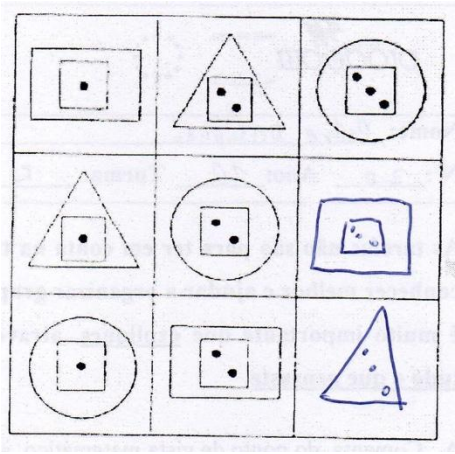


Na Figura 31, o aluno desenha duas figuras que não têm lógica, face às que já estão esboçadas no enunciado da Tarefa C: um octógono e um cilindro. A primeira é uma figura geométrica do plano que nunca aparece e a segunda é um

sólido geométrico, algo que também não está representado no enunciado da tarefa. Na Figura 32, o aluno omite o quadrado central numa das figuras que desenha, o que veio a revelar, posteriormente, algumas dificuldades de visão, que foi importante terem sido detetadas.

Figura 32

RA, dificuldades visuais – L1: crioulo



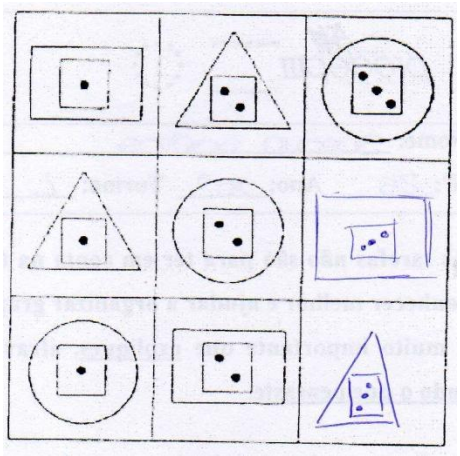
Na Figura 33, a aluna esboça as três pintas centrais e desenha-as na diagonal, mas com uma orientação oposta àquela em que deveriam estar. Isto está geralmente relacionado com algumas dificuldades de lateralização, que podem estar associadas à dislexia, ou a serem alunos esquerdinos, pelo que também é algo que deve ser analisado, posteriormente. Como os alunos esquerdinos deviam estar sentados de maneira a não taparem o que escreviam, em relação ao par, quando trabalhavam em díade, na planta de sala de aula inicial, quando os alunos se sentavam onde queriam e respondiam ao IACC, o professor/investigador assinalava aqueles que eram esquerdinos. Por isso, quando existia este tipo de respostas, podia verificar se isso se aplicava àquela aluna, como aconteceu neste caso. Esta aluna já mobilizava o RA, pois esboçou bem as figuras externas, bem como o quadrado interno e o número de pintas. É importante realçar que, apesar das pintas estarem na diagonal, mas com uma orientação oposta ao que se pretendia, isso não significa que esta aluna não tenha acesso ao RA. Daí ser tão

importante confirmar isso, através de uma conversa informal, na qual ela explique melhor como pensou.

Esta conversa informal foi iniciada pela professora/investigadora. Nela, a Mariana referiu: "Eu queria que fossem quadrados, mas não sei desenhar muito bem e parecem rectângulos... mas eu sei que deviam ser quadrados" (Mariana, CI, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 2002). Também acrescentou: "As pintas, percebi quando foram ao quadro, que eram na outra direcção... e agora, olhando para o que fiz, também consigo ver. Mas eu baralho a esquerda e a direita... tenho dificuldades nisso..." (Mariana, CI, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 2002) e acrescentou: "Eu olhei para a figura toda e vi logo que todas as [figuras] centrais eram quadrados. Observei as horizontais [linhas] e verticais [colunas] e vi que tinha de ser primeiro o rectângulo e depois o triângulo" (Mariana, CI, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 2002). A última frase, reforça a abordagem global da figura, mais frequente quando a L1 é o crioulo. Conjugar a informação das linhas e colunas, ou seja, relacionar duas dimensões e conjugá-las, na análise da figura, acontece quando os alunos já conseguem mobilizar o RA. O acesso a esta forma de raciocínio é reforçado pelo que menciona depois: "Não falámos disto na aula [referia-se à discussão geral], mas se olharmos para as diagonais, é giro: só círculos, ou triângulos... e na outra diagonal as figuras já mudam" (Mariana, CI, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 2002). Quando havia turmas em que algumas resoluções precisavam de mais análise, a professora/investigadora iniciava uma conversa informal, no final da aula, e pedia que lhe "explicassem um pouco mais" (professora/investigadora, DB, Setembro 2002). Os alunos reagiam bem a este tipo de pedido, pois tinham percebido que a professora/investigadora se interessava pelo que pensavam e os valorizava, pelo que explicitavam o que tinham pensado ou desenhado.

Figura 33

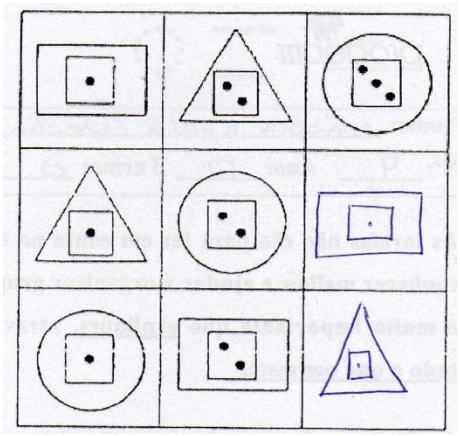
RA – L1: crioulo



Quando recorrem ao RC, os alunos tendem a focar-se numa só dimensão: as linhas; ou as colunas. Por vezes, até o fazem focalizando apenas as duas linhas nas quais falta uma figura, como acontece na Figura 34. Isso leva a que, por vezes, desenhem as pintas em espelho, como se a coluna central fosse um eixo de simetria, esboçando apenas uma pinta dentro de cada quadrado central nas figuras que desenham.

Figura 34

RC – L1: português



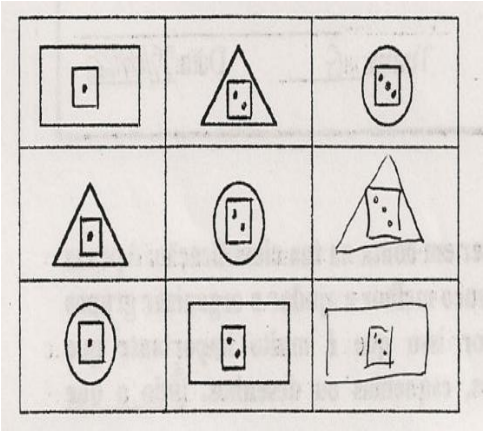
Como se focou nas linhas, apesar de ter mobilizado o RC, como percebemos numa conversa informal, as figuras externas correspondem ao que era esperado: um rectângulo em cima e um triângulo em baixo. Numa conversa informal, este aluno esclareceu: "Eu pensei que era como se fosse um espelho, e as pintas da esquerda apareciam refletidas na direita. Por isso fiz só uma pinta dentro de cada rectângulo. Mas percebi o que o Nuno disse, no quadro." (Manuel, CI, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 1999). Quando explicou o resto, disse: "O mais fácil, eram os do meio: sempre quadrados. Foi a primeira coisa que eu desenhei. Depois, vi que eram diferentes, os de fora, em cada linha e meti este em cima e o triângulo em baixo." (Manuel, CI, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 1999). Pela explicação fornecida, percebemos que ele se focaliza nas linhas e nunca considera as colunas, nem as diagonais, ou a figura como um todo. Assim, trata-se de uma abordagem linha-a-linha, habitual nos alunos cuja L1 é o português, pois corresponde, noutros problemas, a uma abordagem passo-a-passo, frequente na Tarefa E, bem como em tarefas matemáticas resolvidas em aula. Ao não considerar a informação das colunas, ou seja, não conjugar as duas dimensões (linhas e colunas), revela que mobilizou o RC.

Quando os alunos que tinham acesso ao RC se focavam nas colunas, ignorando o que acontecia nas linhas, tendiam a desenhar, nas figuras externas, primeiro o triângulo e depois o rectângulo. Olhando apenas para as colunas, as três figuras geométricas, rectângulo, triângulo e círculo estão representadas. Porém, ao ignorarem as linhas, não reparam que, a segunda linha fica com dois triângulos e a terceira linha com dois rectângulos. Neste caso, geralmente as pintas centrais estavam bem desenhadas, pois eles percebiam que, na primeira coluna, havia uma pinta, na segunda havia duas e na terceira havia três (Figura 35). Estes alunos estavam bastante próximos de terem acesso ao RA. Por isso, se trabalhassem em díade, na sua ZDP (César, 2009, 2024b; Vygotsky, 1934/1962), viam facilitado o acesso ao RA. Este tipo de resolução era tão comum entre alunos cuja L1 era o crioulo, como para aqueles cuja L1 era o português. Quando se tratava de alunos muito novos, no 2.º ciclo do ensino básico, este era o desenvolvimento esperado, mas se fossem mais velhos e frequentassem o ensino secundário, não terem acesso ao RA era mais penalizante, em termos de desempenhos

matemáticos. Nestes casos, o trabalho colaborativo e dialógico, na ZDP dos alunos, era ainda mais essencial.

Figura 35

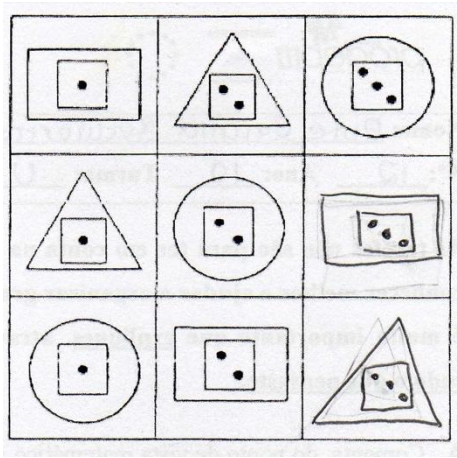
RC – L1: crioulo



A Figura 36 mostra uma resolução bem-sucedida e completa, revelando que este aluno já tem acesso ao RA. Como afirmámos, há uma percentagem semelhante de alunos cuja L1 é o crioulo e daqueles cuja L1 é o português que produzem resoluções completas. Neste exemplo, o quadrado central, as pintas e as figuras externas estão todas bem esboçadas, o que significa que este aluno conseguiu conjugar a informação das linhas com a das colunas. A diferença que observamos entre alunos cuja L1 é o crioulo e aqueles que é o português, é na explicação de como pensaram (oralidade, durante a discussão geral, ou numa conversa informal). Aqueles cuja L1 é o crioulo, preferem uma abordagem global da figura, ou seja, focam-se nas linhas, nas colunas e também nas diagonais, sendo capazes de indicar vários padrões que observam na figura (ex: nas diagonais que sobem do canto inferior esquerdo para o superior direito, o número de pintas vai aumentando um a um). Aqueles cuja L1 é o português, mais raramente se focam também nas diagonais, pois preferem uma abordagem linha-a-linha e coluna-a-coluna, semelhante à abordagem passo-a-passo que utilizam na Tarefa E ou noutras tarefas resolvidas em aula.

Figura 36

RA – L1: crioulo



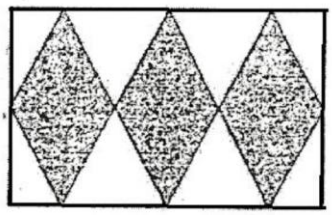
Tarefa D

A Tarefa D (Figura 37) permite identificar se os alunos preferem um raciocínio geométrico, ou um raciocínio analítico, bem como confirmar se os alunos têm acesso ao raciocínio concreto (RC) ou ao raciocínio abstracto (RA), que são avaliados na Tarefa C (Machado, 2014; Ventura, 2012). Como referem César (2024b) e César e Machado (2024a), os alunos cuja L1 é o crioulo, tendem a preferir um raciocínio geométrico e uma estratégia de resolução através de uma representação gráfica que, na parte final da resolução, quando isso é imprescindível, complementam com uma estratégia aritmética. Aqueles cuja L1 é o português, preferem um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética ou algébrica, que pode ser complementada com uma composição matemática. Isto tanto acontece quando as resoluções estão incompletas, como quando estão completas, à semelhança do que observamos na Tarefa A e na Tarefa B.

Figura 37

Enunciado da Tarefa D

Tarefa D – O mosaico da figura tem 15 cm por 10 cm. Qual é a área da parte pintada?

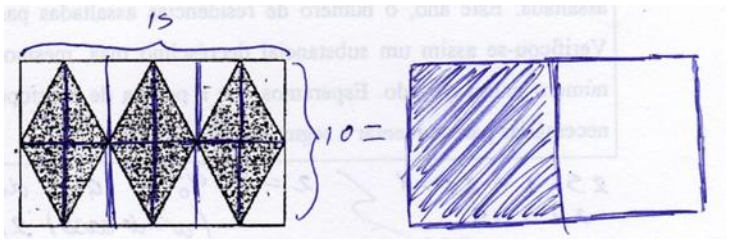


Alguns alunos que elaboraram resoluções incompletas e cuja L1 é o crioulo, mostraram que recorriam a um raciocínio geométrico e a uma estratégia de resolução por representação gráfica, como acontece no exemplo da Figura 38. Este aluno compreendeu que a parte pintada, ou seja, os losangos, era igual à parte em branco e desenhou isso mesmo mostrando, visualmente, essa igualdade. Isso mostra um raciocínio geométrico bem desenvolvido. Porém, a resolução fica incompleta, porque ele não calcula a área da parte pintada, tal como era pedido. Na discussão geral, quando foi ao quadro explicar a sua estratégia de resolução, afirmou: "Devia ter calculado a área, mas não me lembrava de como se calculava a área do rectângulo... sempre tive nega [a Matemática]. Agora já sei, perguntei a um colega. Posso calcular a área?" (Edgar, registado no DB do professor/investigador, Setembro 1997). Este comentário tem sete pontos particularmente interessantes: (1) ele sabia que devia calcular a área, mas não se lembrava da fórmula; (2) respeitou o que tinha sido pedido na 1.ª aula (regras do contrato didáctico) e não perguntou, durante a resolução do IACC, a um colega; (3) perguntou quando saiu da aula, o que mostra desejo de aprender, algo inusitado, num aluno que obtinha sempre classificação negativa a Matemática; (4) não só aceitou ir ao quadro, algo que não costumava acontecer nas aulas de Matemática, como explicou o que tinha sucedido e perguntou se podia calcular a área, mostrando desejo de se tornar um participante legítimo, em vez de um participante periférico (César, 2009; Lave & Wenger, 1991); (5) estava nitidamente satisfeito por participar na aula de Matemática, por aceitarem a sua estratégia de resolução e os colegas a registarem por escrito; (6) a sua auto-estima académica, habitualmente

negativa, já mostrava estar a progredir para mais positiva; e (7) a sua forma de actuação mostrava que a mensagem implícita do professor/investigador estava a surtir efeito, pois ele já considerava que conseguia fazer e aprender Matemática. Se pensarmos que esta discussão geral ocorreu na 2.ª aula desse ano lectivo, isto revela enormes progressos no empoderamento dos alunos que tinham vivenciado insucesso académico cumulativo a Matemática. Convém realçar que este aluno, como muitos outros em situações semelhantes, desde que viu serem aceites e valorizadas as suas formas preferenciais de raciocínio e estratégias de resolução, rapidamente se mostrou disponível e interessado em aprender outras, nomeadamente as que recorriam a raciocínios analíticos e a estratégias de resolução aritméticas e algébricas, aprendendo formalizações bastante complexas sem dificuldade.

Figura 38

Raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica – L1: crioulo

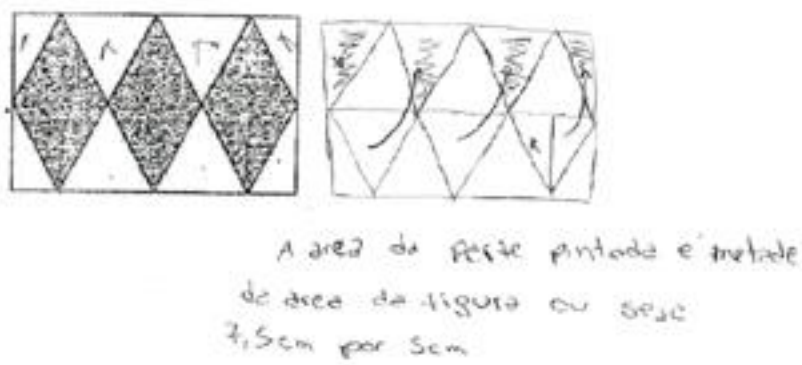


A Figura 39 constitui um exemplo muito interessante, duma aluna cuja L1 é o crioulo e que mobiliza o RC: ela percebe, através de uma representação gráfica e de um raciocínio geométrico, que a área da parte pintada é metade do rectângulo e traça setas que indicam para onde vão os triângulos inferiores do losango. Porém, como mobiliza o RC e não o RA, divide cada uma das dimensões (largura e comprimento) por dois, afirmando que a área são 7.5 cm por 5 cm, na composição matemática que complementa a sua estratégia de resolução por representação gráfica. Este tipo de imprecisão era mais frequente nos alunos mais novos. Aqueles que já mobilizavam o RA, como no exemplo da Figura 40, percebiam que apenas uma das dimensões deveria ser dividida por dois, para calcularem a área da parte pintada.

Considerarmos que a estratégia de resolução principal é por representação gráfica, significa que é esta que dá origem à resolução do problema, é como a aluna pensa. Depois, a composição matemática serve para explicar aquilo que não fica completo apenas com a representação gráfica, ou seja, é uma estratégia de resolução complementar. Em diversas resoluções, das várias tarefas do IACC, observámos que existia uma estratégia de resolução principal, que correspondia à forma preferencial de fazer Matemática, mas que, depois, era complementada com outra estratégia de resolução, para respeitar o que era pedido no enunciado e responder de forma completa, ou mais completa. Assim, é importante identificar a estratégia de resolução principal, ou seja, aquela que orienta a resolução daquele problema, para aquele aluno.

Figura 39

Raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, complementada com uma composição matemática; RC – L1: crioulo



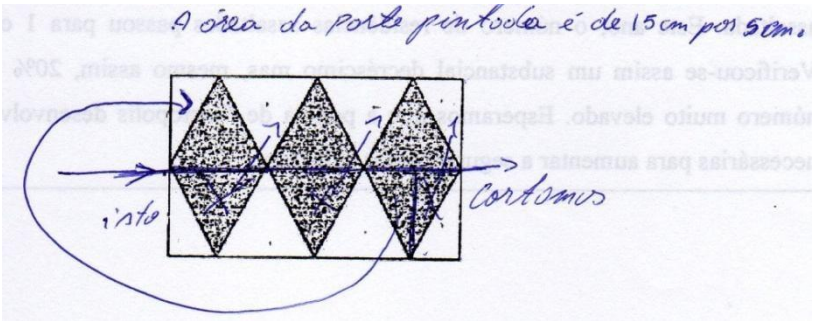
A Figura 40 ilustra uma outra resolução de uma aluna cuja L1 também é o crioulo. Esta resolução é muito interessante pois, usando a própria figura do enunciado da Tarefa D, ela usa setas e escreve "isto cortamos", para indicar que dobra a figura e encaixa os triângulos pintados, da parte de baixo dos losangos, nas zonas brancas da parte de cima. Mais uma vez, nota-se o raciocínio geométrico bem desenvolvido. Em cima, ela escreve que a área da parte pintada é 15 cm por 5 cm, ou seja, reconhece que usa o comprimento (15 cm) e metade da largura (5 cm), do rectângulo onde está inserida a figura, revelando que mobiliza RA.

Faltou-lhe calcular a área que indicou. Mas esta resolução, mesmo incompleta, revela muitas capacidades e competências.

Mais tarde, numa conversa informal, explicou: "Não podíamos usar a calculadora e achei que não conseguia fazer aquela conta. Mas sabia que tinha explicado bem como pensei e que só faltava mesmo a conta, para dizer a área" (Jaciara, CI registada no DB da professora/investigadora, Setembro 2002). Neste exemplo também vemos a preocupação de resolver a tarefa, de forma o mais completa que conseguia, bem como uma auto-estima académica que começa a ser mais positiva, como revela o que explicita na conversa informal. Mais uma vez, o efeito de ver o seu tipo de raciocínio e estratégia de resolução aceites, teve impactes nos desempenhos matemáticos, em aula, desde a primeira semana daquele ano lectivo, o que sublinha como é indispensável sentir-se acolhido e valorizado na sua forma de fazer e aprender Matemática, corroborando o que afirmam César (2009, 2013b, 2024a, 2024b), César e seus colaboradores (2014) e César e Machado (2024a, 2024b, 2025). Por isso, estes exemplos de resoluções das tarefas do IACC constituem fortes evidências empíricas de como tinha sido penalizante, para estes alunos, que estes raciocínios e estratégias de resolução não tivessem sido conhecidos, ou aceites e valorizados, pelos professores dos anos lectivos anteriores.

Figura 40

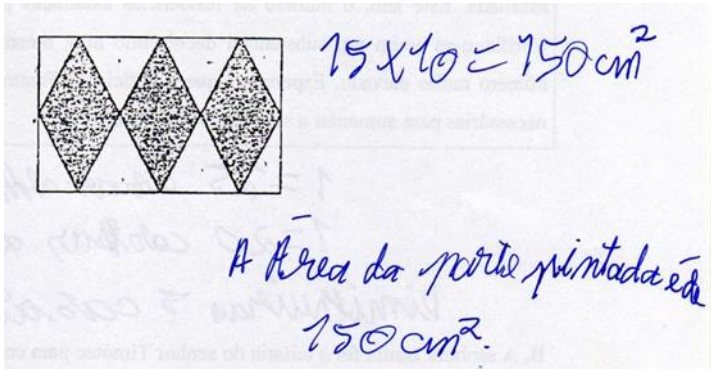
Raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, complementada com uma pequena composição matemática, RA – L1: crioulo



Na Figura 41 temos outra resolução incompleta, mas elaborada por um aluno cuja L1 é o português. Como é habitual, preferiu um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética. Este aluno sabia a fórmula da área do rectângulo, o que não acontecia no exemplo da Figura 38. Contudo, a compreensão do problema é menos rigorosa, pois ele não percebe que a parte pintada da figura é metade da área do rectângulo. Este é um exemplo nítido de como não se podem confundir conhecimentos (fórmula para calcular a área do rectângulo), com capacidades e competências (compreender a figura, identificando que a parte pintada é metade dela e ter acesso ao RA). Este aluno sabia uma fórmula. Mas, do ponto de vista da mobilização de capacidades e competências, era menos desenvolvido do que o aluno da Figura 38, que compreendeu e interpretou a figura de uma maneira mais detalhada. Como salienta César (2024b), os testes de diagnóstico, habitualmente usados no início do ano lectivo, como apenas avaliam conhecimentos, não permitem identificar esta diferença. A distinção entre conhecimentos e capacidades e competências é explorada no conceito de modeladores pessoais de desempenho (MPD), um conceito essencial para fazer progredir os alunos quanto aos desempenhos matemáticos, assim como para promover a sua aprendizagem e desenvolvimento.

Figura 41

Raciocínio analítico e estratégia de resolução aritmética, RC – L1: português



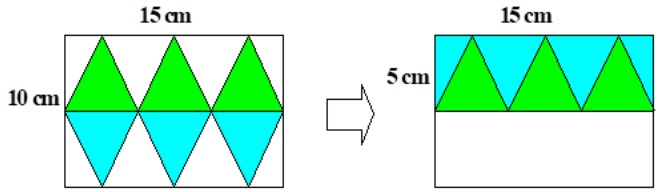
Quando analisamos resoluções completas, as diferenças entre raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica vs. raciocínio

analítico e estratégia de resolução aritmética ou algébrica, continuam a observar-se, tal como realçaram César (2024b) e César e Machado (2024a). O que distingue os alunos cuja L1 é o crioulo daqueles cuja L1 é o português não é o nível de sucesso nesta tarefa, nem em nenhuma das outras tarefas do IACC. É apenas o tipo de raciocínio e a estratégia de resolução que são preferenciais. Estes exemplos tornam ainda mais clara a importância de deixarmos os alunos partirem dos raciocínios e estratégias de resolução naturais para, depois, aprenderem outros, que sejam explorados em aula.

Na Figura 42, uma aluna cuja L1 é o crioulo, a Tatiana (César, 2017; César & Machado, 2024b) usou uma abordagem global (viu a figura como um todo), um raciocínio geométrico e uma estratégia de resolução por representação gráfica. Esta é a resolução completa mais comum elaborada pelos alunos cuja L1 é o crioulo, sendo bastante frequente.

Figura 42

Abordagem global, raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, complementada por uma estratégia de resolução aritmética, RA – L1: crioulo (Tatiana)



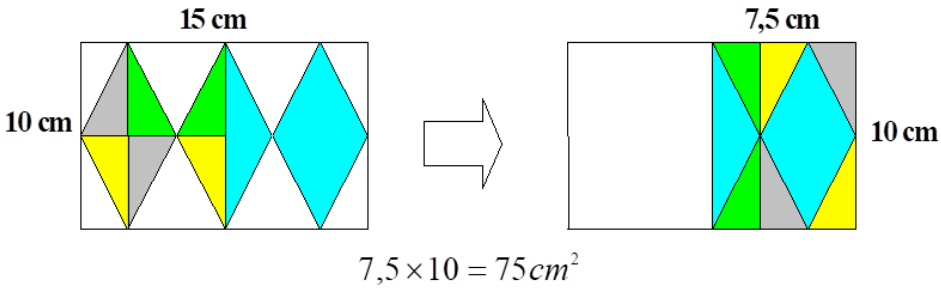
O que fazem é decompor o losango em triângulos e, para provarem que a parte pintada é metade da área do rectângulo, arrumam-nos como se vê no segundo rectângulo, à direita. A Tatiana indicou mesmo que a parte pintada ocupava metade dos 10 cm da largura, ou seja, 5 cm, como escreveu na figura. Este tipo de resolução indica que a aluna já mobiliza o RA. Por fim, quando isso é imprescindível, complementa a resolução com uma estratégia de resolução aritmética, que lhe permite calcular a área da parte pintada, que indica ser 75 cm^2. Convém realçar que um tipo de raciocínio e estratégia de resolução ser

preferencial, não significa que os alunos não lhe associem outros, se forem necessários para obter uma resolução completa. Mas significa que eles precisam de partir das formas de raciocínio e estratégias de resolução que lhes são naturais, que eles preferem, para conseguirem atingir desempenhos elevados, para obterem mais sucesso académico.

A Figura 43 também foi elaborada por um aluno, que designamos por V. (César, 2003, 2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b; César & Machado, 2024a), cuja L1 é o crioulo. Esta estratégia de resolução é muito rara, pois a decomposição da figura é muito mais complexa. Só alunos com uma abordagem global do problema e com um raciocínio geométrico muito desenvolvido, bem como com uma competência para desenhar muito apurada, conseguem fazer esta decomposição. Estes alunos já mobilizam o RA. É de salientar que, na maior parte das vezes, eram alunos pouco motivados nas aulas de Matemática dos anos lectivos anteriores, pelo que não costumavam levar material para as aulas. Fazer um desenho desta complexidade à mão, sem utilizar régua, compasso, ou qualquer outro instrumento auxiliar e conseguir desenhar uma figura muito rigorosa, revela capacidades e competências que são raras. Mesmo do ponto de vista aritmético, os cálculos que tinham de efectuar também eram mais complexos, pois envolviam números decimais, já que metade de 15 são 7.5. Assim, é uma decomposição da figura que só é realizada por alunos com elevadas capacidades visuais e de raciocínio geométrico. Outro aspecto relevante é que os alunos que optaram por esta decomposição foram muito rápidos a elaborar a resposta, o que reforça as elevadas capacidades e competências reveladas.

Figura 43

Abordagem global, raciocínio geométrico e estratégia de resolução por representação gráfica, complementada por uma estratégia de resolução aritmética, RA – L1: crioulo (V.)



Os alunos que elaboraram resoluções completas da Tarefa D, mas cuja L1 era o português, preferiram um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética ou algébrica, como ilustram as Figuras 44 a 48. O que varia, nestes exemplos, é a maneira como calcularam a área da parte pintada, pois uns partiram dos triângulos (metade do losango, ou outra decomposição do losango), do rectângulo e outros do losango. Mais uma vez, isto permitiu, na discussão geral do IACC, explorar estratégias de resolução diferenciadas, enriquecendo as aprendizagens a que este instrumento de avaliação de capacidades e competências deu origem, como já tinham salientado César (2009) ou César e Machado (2024a).

Uma das formas mais rápidas de calcular a área da parte pintada quando se recorre a um raciocínio analítico e a uma estratégia de resolução aritmética, é calcular a área total do rectângulo (150 cm^2) e, depois, dividi-la por dois, visto que a parte pintada é metade da área do rectângulo, obtendo 75 cm^2. Vemos dois exemplos deste tipo de raciocínio nas Figuras 44 e 45. Na Figura 44, o aluno calcula a área do rectângulo e, depois, divide-a por dois. Não é muito rigoroso, pois a área do retângulo é indicada em cm, em vez de cm^2. Para além disso, não indica que está a determinar uma área, usando a simbologia adequada, nem coloca as unidades no cálculo da área pintada. Mas o raciocínio é adequado ao problema. Depois, complementa a estratégia de resolução aritmética com uma pequena composição matemática, em que explica porque dividiu a área por dois.

É curioso salientar que, os que começaram por uma estratégia de resolução por representação gráfica (Figuras 42 e 43), precisaram de a complementar com

uma estratégia de resolução aritmética, para calcularem a área, no final. Os que começam por usar uma estratégia de resolução aritmética, precisam de a complementar com uma composição matemática (Figura 44), ou com uma representação gráfica (Figuras 45 e 47), para explicarem que a área da parte pintada é metade da área do rectângulo. Na Figura 45, a representação gráfica é feita numerando cada triângulo considerado na decomposição da figura do enunciado.

Figura 44

Raciocínio analítico e estratégia de resolução aritmética, complementada por uma composição matemática, RA – L1: português

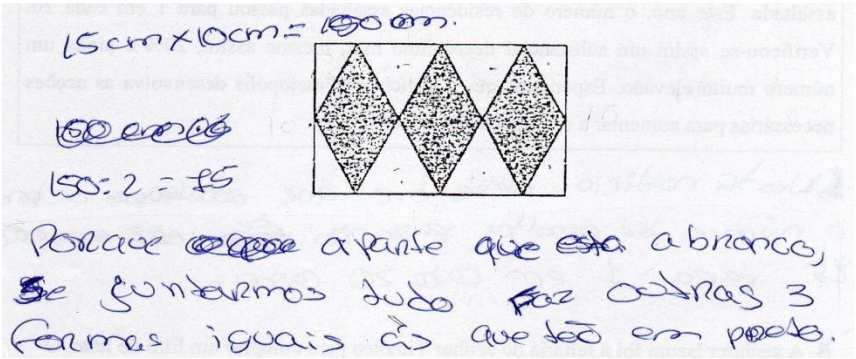
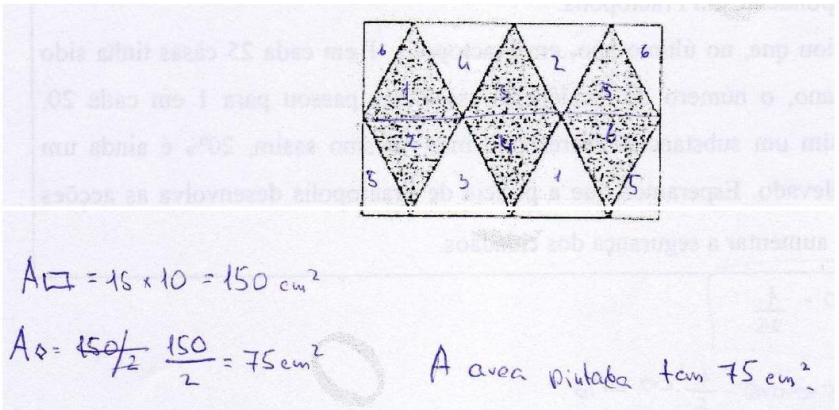


Figura 45

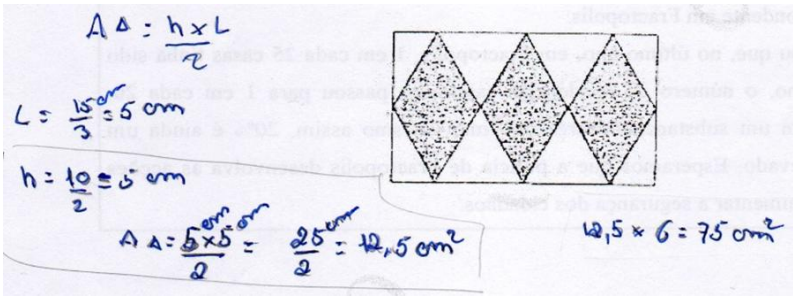
Raciocínio analítico e estratégia de resolução aritmética, complementada por uma representação gráfica, RA – L1: português



As Figuras 46 e 47 partem ambas do cálculo da área dos triângulos. Ambos recorrem a um raciocínio analítico e a uma estratégia de resolução algébrica, complementada, na Figura 46, por uma estratégia de resolução aritmética, quando calcula a área da parte pintada. Nem sempre estas estratégias de resolução estão indicadas de forma muito rigorosa, do ponto de vista matemático. Na Figura 46, é de salientar a organização da resolução: indica a fórmula para calcular a área do triângulo, como calculou o valor da base e da altura, e, depois, calcula a área da parte pintada. O Tomás (César, 2017; César & Machado, 2024b), que elaborou esta resolução, ao multiplicar a área do triângulo por seis, reconhece que cada losango se divide em dois triângulos iguais. Porém, nunca explicita isso na resposta escrita que elaborou, o que revela bem como a representação gráfica não é uma estratégia de resolução a que ele recorra, de forma natural.

Figura 46

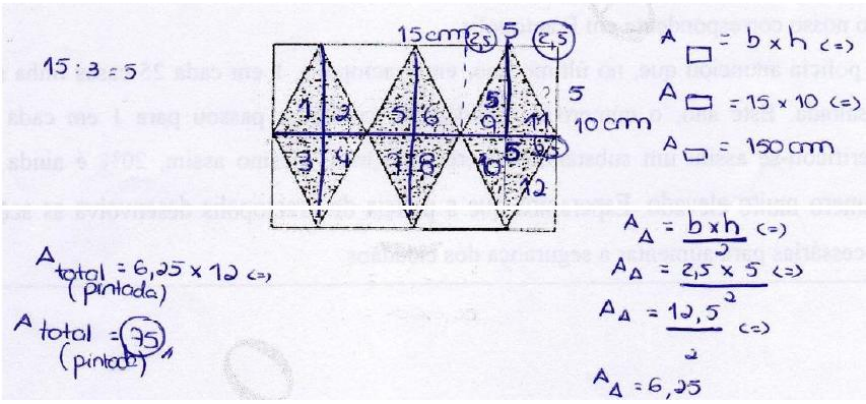
Raciocínio analítico e estratégia de resolução algébrica, complementada com uma estratégia de resolução aritmética – L1: português (Tomás)



Na Figura 47 esta estratégia de resolução é complementada com uma estratégia de representação gráfica, que permite compreender que existem 12 triângulos iguais nos três losangos pintados, ou seja, esta aluna divide cada losango em quatro triângulos, o que é mais complexo, do ponto de vista de decomposição da figura, do que dividir cada losango em dois triângulos.

Figura 47

Raciocínio analítico e estratégia de resolução algébrica, RA – L1: português



De realçar que vários destes alunos afirmaram, mais tarde, na discussão geral do IACC, em conversas informais ou nas entrevistas, que tinham utilizado a área do triângulo porque não se lembravam da fórmula para calcular a área do losango. Como salientou Ventura (2012), é mais frequente os alunos mobilizarem a fórmula da área do rectângulo e do triângulo, do que a fórmula da área do losango.

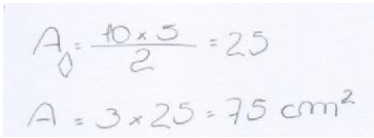
O último exemplo (Figura 48) é de um aluno que se lembrava da fórmula da área do losango, pelo que a utilizou, multiplicando esse resultado por três (número de losangos pintados). Se os alunos soubessem a fórmula da área do losango, esta era uma maneira rápida de elaborarem uma resolução completa. Este é o único tipo de resolução em que os alunos não precisavam de perceber que a parte pintada era metade da área do rectângulo, pelo que podiam recorrer apenas a um raciocínio analítico e a uma estratégia de resolução algébrica, que não necessitava de ser complementada por nenhuma outra estratégia de resolução. No entanto, como era muito raro que os alunos recordassem a fórmula da área do losango, esta resolução foi pouco usada.

É de salientar que muitos alunos aprenderam novos conhecimentos matemáticos, que na primeira aula não mobilizavam, devido à discussão geral do IACC. Assim, apesar de na primeira semana de aulas não se abordarem novos conteúdos programáticos, isso não significa que os alunos não interiorizem

conhecimentos matemáticos, nomeadamente os que se relacionavam com as resoluções das tarefas do IACC, exploradas durante a discussão geral, em grande grupo (turma). Terem ido todos ao quadro, vivenciarem uma situação em que todos tinham sucesso em alguma tarefa ou parte de tarefa, foi um poderoso mecanismo de *inter-empowerment*, que impactou positivamente a motivação dos alunos para aprenderem Matemática. Isso constitui uma forte evidência empírica, pois alunos que não participavam nas aulas, raramente levavam materiais e tinham insucesso académico cumulativo, nos anos lectivos anteriores, estavam a trabalhar, com vontade de aprender e registavam, por escrito, as resoluções que os colegas explicitavam, quando iam ao quadro. Numa primeira semana de aulas, esta mudança foi muito importante e teve enorme pregnância nas aprendizagens matemáticas destes alunos.

Figura 48

Raciocínio analítico e estratégia de resolução algébrica – L1: português



A análise dos desempenhos na Tarefa D iluminou diferenças quanto ao tipo de raciocínio (geométrico ou analítico), bem como quanto à estratégia de resolução (por representação gráfica, aritmética, algébrica ou composição matemática) que os alunos preferem. Estas preferências são configuradas pela L1, como salientaram César (2024b) e César e Machado (2024a). Para os alunos que participam na cultura cabo-verdiana, que viam frequentemente as suas estratégias de resolução e raciocínios serem rejeitados, na escola, é particularmente importante que estes sejam respeitados e aceites, para que eles não vivenciem formas de exclusão que, embora subtis, têm efeitos profundamente nefastos. Para eles, serem convidados a explicar como tinham resolvido as tarefas, usando os raciocínios e estratégias de resolução que lhe são naturais, foi essencial para o seu empoderamento, bem como para promover os desempenhos e aprendizagens matemáticas. Por isso, aceitar todos os tipos de raciocínio e estratégias de resolução

foi um passo fundamental para promover uma educação intercultural e inclusiva, onde os alunos que participavam na cultura cabo-verdiana não se sentiam rejeitados e excluídos.

Tarefa E

A Tarefa E pretendia avaliar se os alunos conseguiam utilizar conhecimentos matemáticos em tarefas do quotidiano, como compras e vendas. Assim, analisava a conexão entre a Matemática escolar e a Matemática utilizada na vida real. Quando o projecto IC começou, a moeda que se usava em Portugal eram os escudos. Mil escudos correspondiam a um conto. A partir de 2002, passaram a usar-se euros, tendo o enunciado sido adequado à nova moeda. Daí, apresentarmos dois enunciados (Figuras 49 e 50).

Para além disso, esta tarefa também pretendia identificar se os alunos preferiam uma abordagem global ou passo-a-passo, quando resolviam problemas (Machado, 2014; Ventura, 2012). César (2024b) e César e Machado (2024b) mostraram que os alunos cuja L1 é o crioulo, geralmente preferem uma abordagem global dos problemas, enquanto aqueles cuja L1 é o português tendem a usar uma abordagem passo-a-passo, algo que também já ilustrámos em alguns dos exemplos que analisámos na Tarefa D. Como esta tarefa estava relacionada com compras e vendas, a estratégia de resolução mais frequentemente encontrada, independentemente da L1, é a aritmética. Isto revela como a natureza das tarefas configura o tipo de raciocínio e de estratégia de resolução utilizados. Alguns alunos optam por elaborar uma pequena composição matemática, mas poucos recorreram a uma estratégia de representação gráfica, devido à natureza desta tarefa. Assim, quando os professores escolhem, adaptam ou elaboram as tarefas que vão propor, em aula, sobretudo nas primeiras aulas, é importante que sejam tarefas cuja natureza permite diversas abordagens, raciocínios e estratégias de resolução, tal como se vê na primeira interacção entre pares que analisamos em seguida, ao discutirmos os desempenhos do V. e da M., e da Tatiana e do Tomás.

Figura 49

Enunciado da Tarefa E, quando se usavam escudos

E. Um negociante de arte comprou uma obra por 300 contos e, logo em seguida, vendeu-a por 400 contos. Mais tarde arrependeu-se e voltou a comprar a mesma obra por 500 contos, vendendo-a depois por 600. Nestes negócios, ele teve lucro, prejuízo, ou ficou na mesma? Porquê? Se teve lucro ou prejuízo, de quanto foi?

Figura 50

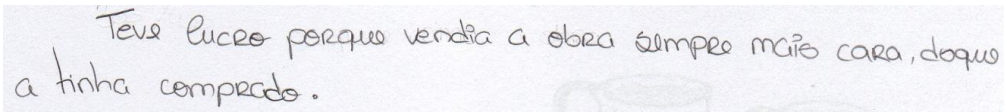
Enunciado da Tarefa E, quando se passaram a usar euros

E. Um negociante de arte comprou uma obra por 300 euros e, logo em seguida, vendeu-a por 400 euros. Mais tarde arrependeu-se e voltou a comprar a mesma obra por 500 euros, vendendo-a depois por 600. Nestes negócios, ele teve lucro, prejuízo, ou ficou na mesma? Porquê? Se teve lucro ou prejuízo, de quanto foi?

Alguns alunos reconheciam que tinha havido lucro, pois o comerciante vendia sempre a obra de arte mais cara do que a tinha comprado. Isto significa que recorriam a uma abordagem passo-a-passo, pois olhavam para cada compra e para cada venda pela ordem que estas eram mencionadas no enunciado, como ilustra o exemplo da Figura 51. Esta resolução está incompleta, porque sabemos que existiu lucro, mas este não está quantificado.

Figura 51

Abordagem passo-a-passo, estratégia de resolução baseada numa composição matemática, RC – L1: português

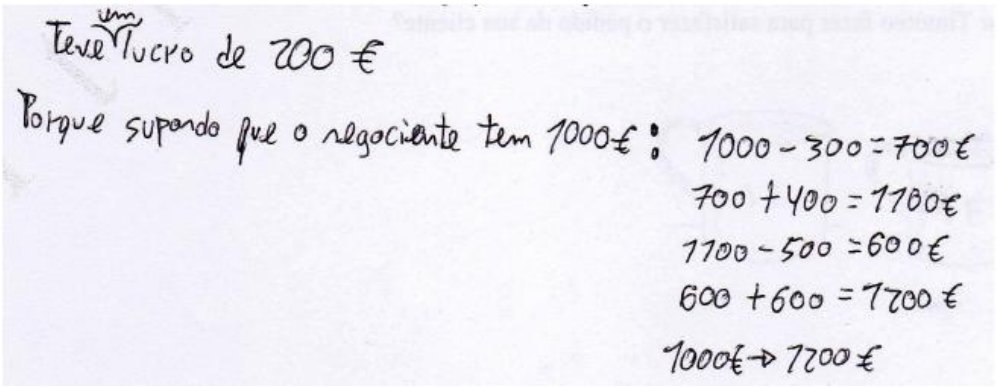


Na Figura 52 temos um exemplo de uma resolução completa, que ilustra uma abordagem passo-a-passo e que revela que o aluno mobiliza o raciocínio concreto (RC), pois precisou de partir de um valor imaginário que o comerciante tinha (1000 euros) e, depois, foi realizando cada uma das operações indicadas no enunciado. Assim, mostra conexão à vida real e às situações de compra e venda,

mas precisa de recorrer a um exemplo concreto (dinheiro que tinha), para conseguir resolver a tarefa. Este tipo de resolução é mais frequente nos alunos mais novos, que ainda não acedem ao raciocínio abstracto (RA). Neste exemplo, é curioso que o aluno começa por escrever a resposta: "Teve um lucro de 200 €" e, depois, acrescenta o que mostra a mobilização do raciocínio concreto (RC): "Porque supondo que o negociante tem 1000 €:", seguindo-se a realização de cada operação, que corresponde a cada compra e a cada venda, pela ordem indicada no enunciado. Trata-se de uma resolução completa, detalhada e clara, que foi dada por um aluno cuja L1 era o português, como era habitual quando a abordagem era passo-a-passo.

Figura 52

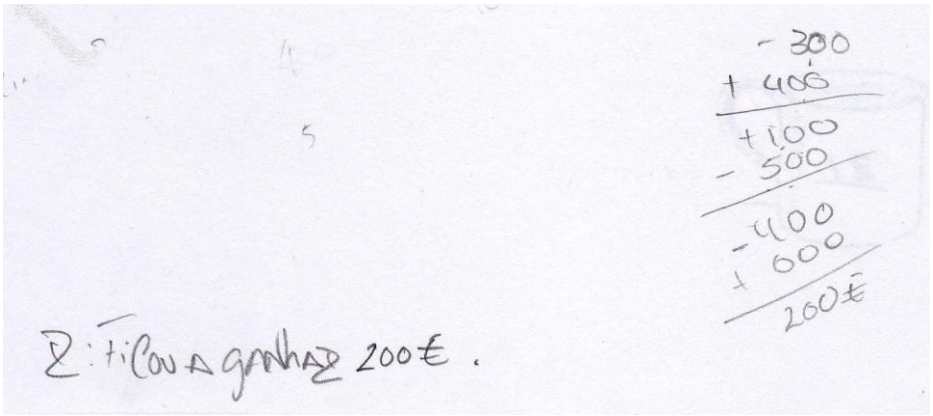
Abordagem passo-a-passo, estratégia de resolução aritmética, RC – L1: português



A Figura 53 mostra um exemplo semelhante quanto à abordagem, que também é passo-a-passo, pois segue a ordem das operações de compra e venda indicadas no enunciado, mas mobilizando o raciocínio abstracto (RA). Aqui, o aluno, cuja L1 também é o português, já não necessita de ir ao concreto e de imaginar uma determinada quantia, que o comerciante teria à partida. Assim, enquanto no exemplo da Figura 52 o aluno efectua adições e subtracções de números naturais, na Figura 53 ele opera com números inteiros, positivos e negativos. No final, escreve a resposta, quantificando o lucro obtido.

Figura 53

Abordagem passo-a-passo, estratégia de resolução aritmética, RA – L1: português

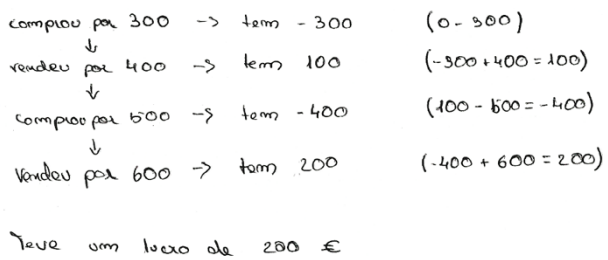


A aluna, cujo exemplo mostramos na Figura 54, também usou uma abordagem passo-a-passo, na qual indica o que acontece após cada transação. Já tendo acesso ao RA, não precisa de imaginar uma quantia de partida. Por isso, após a primeira operação, considera que ele ficou com -300, ou seja, estava com saldo negativo. Depois, realizando as diversas operações, vê que, no final, ele tem 200 euros, ou seja, teve esse lucro.

A estratégia de resolução utilizada nestes três exemplos é a mesma: aritmética. Contudo, a forma como raciocinam e como a apresentam é distinta, o que permite tornar a discussão geral do IACC mais rica, se várias delas co-existirem numa mesma turma.

Figura 54

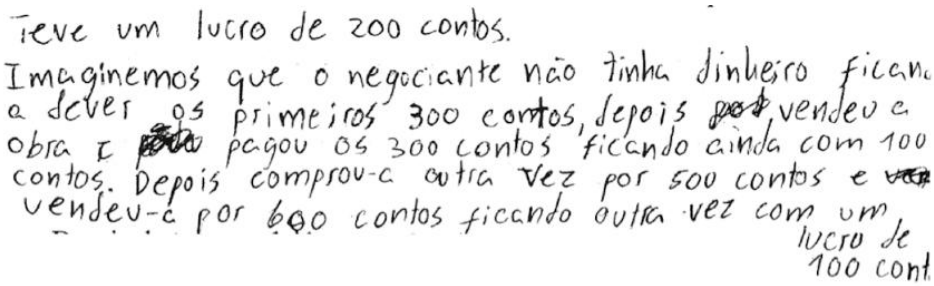
Abordagem passo-a-passo, estratégia de resolução aritmética, RA – L1: português



Na Figura 55, vemos uma estratégia de resolução que usa uma pequena composição matemática para explicar um raciocínio analítico, semelhante ao que consta da Figura 54. Ambos preferem uma abordagem passo-a-passo, como é habitual nos alunos cuja L1 é o português. Isto mostra que abordagens do problema e raciocínios semelhantes podem ser expressos por estratégias de resolução distintas.

Figura 55

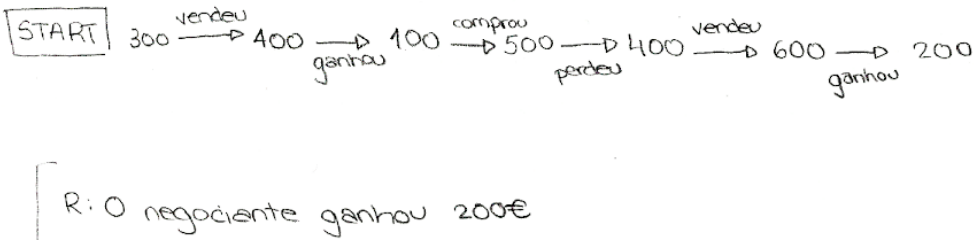
Abordagem passo-a-passo, estratégia de resolução baseada numa composição matemática, RA – L1: português



A Figura 56 é muito interessante porque, numa tarefa em que era difícil recorrer a uma estratégia de resolução por representação gráfica, esta aluna consegue fazer um esboço de representação gráfica pela maneira como escreve o START, dentro de um rectângulo, e como indica, com setas, o que foi acontecendo. No entanto, a principal estratégia de resolução que utilizou é a aritmética. Ela compreendeu o que sucedeu ao comerciante, embora a maneira como escreve nem sempre seja muito rigorosa. A abordagem ao problema é passo-a-passo, aquela que é preferencial para os alunos cuja L1 é o português. A sequência escrita, através das setas, nem sempre é muito clara, embora ela identificasse que o lucro é de 200 Euros.

Figura 56

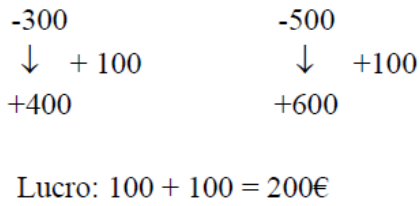
Abordagem passo-a-passo, baseada num esboço de representação gráfica e numa estratégia de resolução aritmética, RA – L1: português



Na Figura 57, uma outra aluna cuja L1 é o português, também opta por uma abordagem passo-a-passo, usando uma estratégia de resolução aritmética, apresentada de uma forma esquemática, pelo que faz um esboço de uma estratégia de resolução por representação gráfica, através das setas, que relacionam cada compra e venda, bem como do "+ 100", que mostra o lucro obtido em cada transação. Nesta resolução, a parte esquemática facilita muito a compreensão do que aconteceu em cada transação e de qual foi o lucro final. Por último, indica o lucro total, somando o lucro obtido após cada venda. Não é escrita uma resposta, mas percebe-se claramente quanto foi o lucro.

Figura 57

Abordagem passo-a-passo, estratégia de resolução: aritmética e esboço de representação gráfica – L1: português

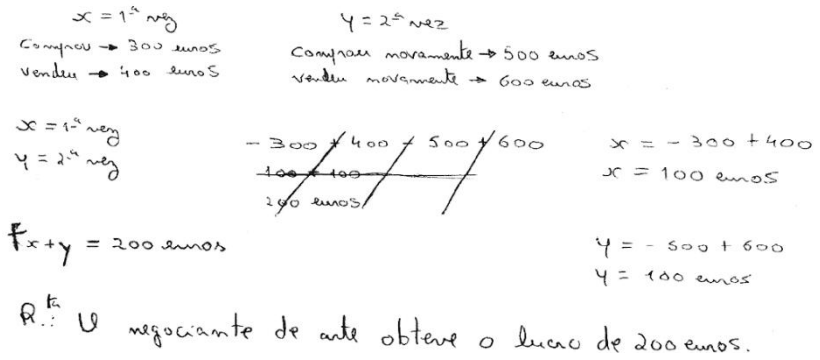


Alguns alunos tentavam usar conteúdos matemáticos que tinham aprendido em anos lectivos anteriores. Na Figura 58, uma aluna tenta usar equações, escolhendo a incógnita x para designar a primeira transação e a incógnita y para a

segunda transação. A abordagem continua a ser passo-a-passo, o raciocínio analítico, mas aqui há o recurso a uma estratégia de resolução algébrica. Esta estratégia de resolução foi muito raramente usada na Tarefa E.

Figura 58

Abordagem passo-a-passo, estratégia de resolução algébrica, RA – L1: português



As resoluções incompletas, tanto aparecem quando os alunos recorrem a uma abordagem passo-a-passo, como a uma abordagem global. Na Figura 59, uma aluna cuja L1 é o crioulo, prefere uma abordagem global e usa uma estratégia de resolução aritmética, adicionando o que foi gasto nas compras e recebido nas vendas. Na resposta, não quantifica o lucro, como era pedido. Apesar da resolução da Figura 59 ter a estratégia utilizada muito mais detalhada do que na Figura 60, que é muito sucinta, esta última tem uma resolução completa. A aluna que elaborou a resolução da Figura 60 utiliza uma abordagem global do problema e recorre a uma pequena composição matemática, como estratégia explícita de resolução, podendo inferir-se o recurso a uma estratégia de resolução aritmética, que lhe permite saber o lucro obtido com as compras e as vendas. É uma resolução sucinta, que revela bastante poder de síntese.

Figura 59

Abordagem global, estratégia de resolução aritmética, com esboço de representação gráfica (setas) – L1: crioulo

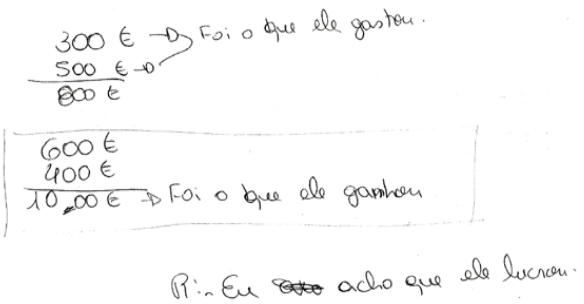
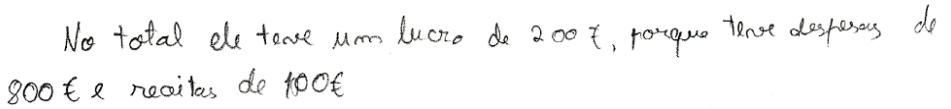


Figura 60

Abordagem global, estratégia de resolução baseada numa composição matemática e estratégia de resolução aritmética (subentendida) – L1: crioulo



No exemplo da Figura 61, uma aluna cuja L1 é o crioulo, usa uma forma bastante esquemática de responder, semelhante à da Figura 57, mas preferindo uma abordagem global do problema e uma estratégia de resolução aritmética: adiciona todo o dinheiro gasto nas compras, todo o dinheiro conseguido nas vendas e, por último, calcula a diferença entre o que recebeu nas vendas e o que gastou nas compras, obtendo o lucro. Apesar da ausência de resposta, a quantificação do lucro está expressa de uma forma inequívoca.

Figura 61

Abordagem global, estratégia de resolução aritmética, RA – L1: crioulo

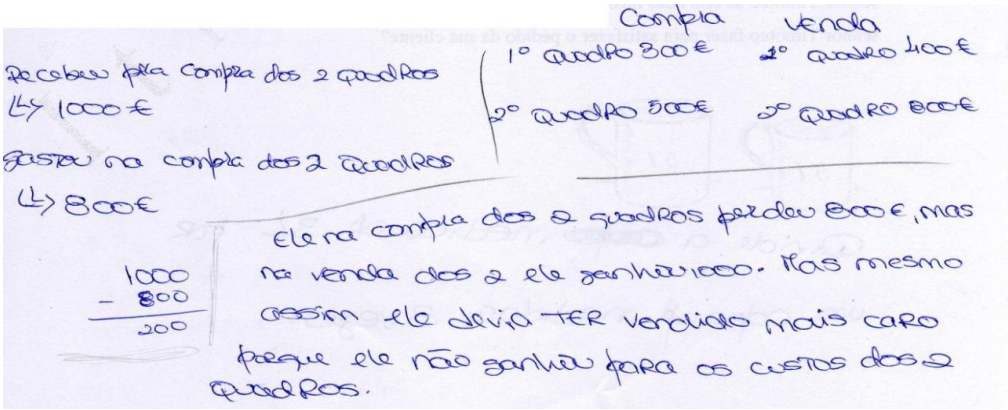
Compras: 300 + 500 = 800€
Vendas: 400 + 600 = 1000€

Lucro: 1000 – 800 = 200€

Na Figura 62, uma aluna cuja L1 é o crioulo recorre também a uma abordagem global do problema, à esquerda da folha, quando indica o total gasto nas compras, o total conseguido nas vendas e calcula a diferença entre essas quantias, para obter o lucro. Na parte superior direita, ela anota o preço de cada compra e de cada venda, como se fosse um apontamento, mas ilustrando logo a abordagem global, que prefere, ao escrever "compra" e "venda", indicando como raciocina para obter o resultado. Do ponto de vista matemático, a resolução é muito clara, como se observa na parte superior direita e esquerda. Quando tenta escrever uma pequena composição matemática, em baixo, mais à direita, perde-se clareza, provavelmente devido a algumas dificuldades linguísticas em relação à língua de instrução, que é o português. A língua de instrução não ser a que os alunos falam em contexto familiar e no bairro onde habitam, pode significar alguns constrangimentos linguísticos, na escola. Este exemplo ilumina como é importante não confundir questões linguísticas, referentes à maneira como se domina a língua de instrução, com conhecimentos matemáticos.

Figura 62

Abordagem global, baseada numa composição matemática e estratégia de resolução aritmética, RA – L1: crioulo

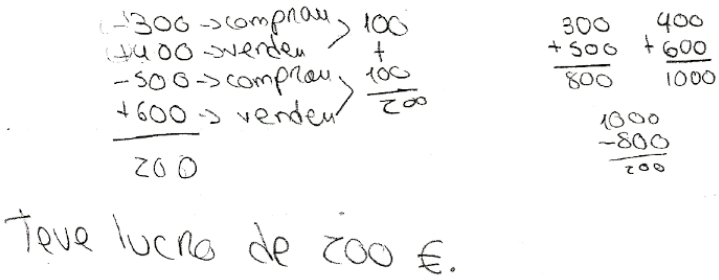


A Figura 63 ilustra algo pouco frequente: uma aluna que usa as duas abordagens: à esquerda, segue uma abordagem passo-a-passo, fazendo cada operação de acordo com a ordem das transações indicadas no enunciado e quantificando o lucro obtido; à direita, usa uma abordagem global, adicionando o dinheiro

utilizado nas compras e nas vendas e, depois, mais abaixo, quantificando o lucro através da diferença entre esses dois montantes. Esta dupla abordagem dá origem a uma estratégia de resolução aritmética bastante detalhada. Também lhe permite verificar que as operações efectuadas estão correctas, uma vez que o lucro obtido, seguindo qualquer uma das abordagens, é o mesmo. Assim, a utilização de uma outra abordagem funcionou como um processo de verificação.

Figura 63

Abordagem passo-a-passo e global, estratégia de resolução aritmética e esboço de representação gráfica (setas), RA – L1: crioulo



Tal como nas restantes tarefas que compõem o IACC, os exemplos analisados, na Tarefa E, mostram que a abordagem ao problema é configurada pela L1. A abordagem global é a preferida pelos alunos cuja L1 é o crioulo, enquanto a abordagem passo-a-passo é mais usada por aqueles cuja L1 é o português, tal como tinham salientado César (2024b) e César e Machado (2024b). Mais uma vez, a Tarefa E mostra como é importante que os alunos possam partir das abordagens, raciocínios e estratégias de resolução que são naturais para eles, para depois construírem outros conhecimentos matemáticos, melhorando os seus desempenhos e tendo acesso ao sucesso académico em Matemática.

Características inovadoras do projecto IC

A primeira semana de aulas

Quando se pretende mudar o contrato didáctico dito tradicional, baseado em relações verticais professor/aluno, desencorajando ou proibindo as interacções sociais aluno/aluno e em que o poder não é distribuído, para um contrato didáctico inovador, que promove as interacções entre pares e a distribuição do poder entre o professor e os alunos, fomentando o sentido crítico e a autonomia, é fundamental que a primeira semana de aulas represente um corte com o contrato didáctico dito tradicional (César, 2003, 2009). Como referem César (2009) ou Borba e seus colaboradores (2024), muitas das regras que regem o contrato didáctico são implícitas. Por isso, é essencial tornar explícitas as principais regras do novo contrato didáctico e, para além disso, preparar cuidadosamente as mensagens implícitas que se querem utilizar nesta semana, para que elas contribuam para que todo e qualquer aluno se sinta motivado para participar na resolução das tarefas propostas, em aula.

Muitos dos alunos tinham construído representações sociais negativas da Matemática e de si próprios, enquanto aprendentes, pois tinham vivenciado insucesso escolar, de forma cumulativa, nesta disciplina. Os que participavam em culturas minoritárias sócio-culturalmente desvalorizadas costumavam ver as suas formas naturais de abordagem dos problemas, raciocínios e estratégias de resolução serem rejeitados, em aula. Por isso, uma das mensagens implícitas que era importante passar, através das práticas, era a de que todos eram capazes de resolver tarefas matemáticas e de o fazer de uma forma tão interessante, que valia a pena os colegas registarem, por escrito, aquela resolução. Daí que, durante a primeira semana de aulas, na discussão geral do IACC, todos os alunos fossem convidados a ir ao quadro para explicarem a resolução de uma tarefa, ou parte dela, que tinham realizado com sucesso (César, 2009, 2024b; César & Machado, 2025; Machado, 2014; Ventura, 2012). Se apenas tivéssemos dito que sabíamos que eles conseguiam aprender, não teriam acreditado e não surtia efeito. Mas, quando viram que todos iam ao quadro e explicavam algo que tinham elaborado, que os

que habitualmente nem resolviam as tarefas eram os primeiros a ir ao quadro e a colaborar na discussão geral de forma empenhada, os impactes foram enormes, pois nunca o tinham vivenciado antes. Como afirmaram frequentemente nas entrevistas, conversas informais e questionários, esta aula foi determinante para a sua trajectória de participação ao longo da vida, na escola e fora dela.

A primeira semana de aulas era muito diferente porque: (1) os alunos eram informados de que a turma fazia parte do projecto IC, que iam trabalhar em díades ou pequenos grupos e que, em Janeiro, poderiam decidir se queriam continuar a trabalhar assim, ou não; (2) o professor estava muito satisfeito por leccionar aquela turma, o que causava espanto, pois, geralmente, eram turmas com bastante insucesso escolar e/ou formas de actuação disruptivas, que os professores preferiam evitar; (3) a primeira semana de aulas não teria teste de diagnóstico (habitual naquela época, e ainda hoje), nem novos conteúdos de Matemática, seria destinada a conhecer melhor os alunos, as suas capacidades, competências, interesses e necessidades; (4) nessa semana iam responder a alguns instrumentos, que não eram tidos em consideração para a avaliação sumativa, apenas serviam para os conhecer melhor, pelo que era importante responderem-lhe honestamente; (5) o professor/investigador formava as díades com base no que faziam na primeira semana, de maneira a que todos conseguissem progredir e ter sucesso a Matemática. Isto criava curiosidade, por parte dos alunos, embora muitos achassem que era só uma maneira divertida de começar o ano, "uma simpatia inicial", como relataram diversos alunos. Depois, viria "a Matemática a sério" e "voltavam a falhar", como afirmaram em muitas entrevistas e conversas informais, durante esse ano lectivo e no *follow-up*. Acreditar que podiam tornar-se muito melhores alunos a Matemática não era algo que aqueles que experienciavam insucesso académico há vários anos achassem possível. Mesmo os que tinham Nível 3 (a classificação positiva mais baixa), não acreditavam nisso.

Como o projecto IC era bastante inovador, as escolas começaram por o deixar funcionar em turmas bastante complicadas do ponto de vista das formas de actuação dos alunos, bem como com elevado insucesso escolar. Numas escolas, porque acreditavam que estes alunos poderiam melhorar, se fossem confrontados com outras formas de aprender Matemática, ou porque os professores/investigadores, ou a supervisora dos estágios, que era a coordenadora deste

projecto, se ofereciam para leccionar turmas que os restantes professores preferiam evitar. Noutras, que não davam grande crédito aos princípios deste projecto, nem à educação intercultural e inclusiva, porque aquelas turmas já tinham resultados tão fracos, que não podiam piorar. Estas turmas, desafiadoras quanto à falta de motivação dos alunos, ao insucesso académico e escolar, à heterogeneidade cultural, ou à existência de alunos com necessidade de AESE e casos mais complexos, precisavam particularmente de mensagens implícitas, transmitidas na 1.ª semana de aulas. Algo que os ajudasse a passar de participantes periféricos para participantes legítimos (César, 2009, 2024b; Lave & Wenger, 1991). Nelas, a discussão do IACC era o ponto de viragem essencial, antes de se abordarem os conteúdos matemáticos previstos para aquele ano de escolaridade.

O processo de avaliação implementado no projecto IC

No IC recorria-se à avaliação formativa e sumativa. Tanto numa, como na outra, pretendia-se que estas formas de avaliação contribuíssem para tornar os alunos mais organizados, responsáveis e autónomos. Optava-se por uma avaliação que fosse realizada em díade, em grupo e individualmente, oralmente e por escrito, para desenvolver diversas capacidades e competências. Assim, recorremos a um leque diversificado de instrumentos de avaliação: mini-testes (em díade), trabalhos de projecto (em pequenos grupos), pequenas apresentações de conteúdos (individuais, em díade, em grupo), pequenas composições matemáticas (individuais, em díade, em grupo), testes (individuais), discussões gerais (em grande grupo, turma), entre outras.

Muitos dos alunos só estudavam nas vésperas dos testes ou não estudavam nem nessa altura. Por isso, conseguir que eles estudassem os conteúdos abordados em cada semana era algo que estava subjacente ao processo de avaliação que foi concebido. Assim, desde a terceira semana de aulas, os alunos realizavam um mini-teste, em díade, que continha uma ou duas questões, sobre os conteúdos abordados naquela semana. O mini-teste seria respondido em cerca de 10 minutos e escolhia-se um dia fixo, por semana, para que ele fosse realizado, logo no início da aula. Assim, havia uma rotina e organização que começavam a ser vivenciadas pelos alunos. Os alunos tinham sete mini-testes no 1.º período e no 2.º

período, que eram mais longos, e cinco no 3.º período, que era mais curto. Quando resolviam sete mini-testes, a classificação mais baixa e a mais elevada, não contavam para a avaliação sumativa. Pretendia-se retirar a mais fraca porque, se alguma díade, por alguma condição excepcional, obtivesse uma classificação num mini-teste que não correspondesse aos desempenhos habituais, não seria penalizada. Porém, se retirávamos a mais fraca, também teríamos de retirar a mais elevada, para não inflacionarmos as classificações. No 3.º período, como faziam cinco mini-testes, todos contavam para a avaliação sumativa. Porém, já estando mais habituados a resolvê-los e a estudar todas as semanas, neste período esta forma de actuação já não causava dificuldades.

Em cada mini-teste, a díade só tinha uma folha de respostas. Os alunos deveriam discutir entre si os raciocínios e estratégias de resolução a utilizar e escrevê-los nessa folha de respostas. Portanto, a classificação obtida era igual para os dois alunos que constituíam a díade. Cada mini-teste era classificado até 20%. Assim, o total dos cinco mini-testes considerados para a avaliação sumativa, correspondia a 100%, ou seja, eram equiparados a um teste individual. Como os alunos achavam que realizar mini-testes em díade era uma vantagem, que era mais fácil, passaram a estudar os conteúdos que eram lecionados em cada semana, como pretendia a equipa do IC. Mais uma vez, as práticas e os implícitos surtiam muito mais efeitos do que os discursos, por muito simpáticos e bem-intencionados que estes fossem. Foi saberem que tinham um mini-teste em díade todas as semanas que os fez estudar semanalmente, porque vivenciaram que era mais fácil estar concentrados 10 minutos, estudarem o que tinham abordado naquela semana e obterem uma melhor classificação (César, 2009; César et al., 2014; Machado, 2014; Ventura, 2012).

Porém, para garantir que ambos estudavam e se empenhavam, era preciso que a discussão dos mini-testes, realizada na aula seguinte, tivesse características específicas. Assim, qualquer um dos alunos podia ser escolhido para ir ao quadro explicitar como a díade tinha resolvido aquela tarefa, ou resolver alguma questão cuja resolução não estivesse completa, ou que não tivesse sido bem-sucedida. Se quem fosse ao quadro acertasse uma resolução que já tinham acertado, ou não fosse bem-sucedido numa em que já não o tinham sido, a classificação do mini-teste não se alterava. Porém, se acertasse uma resolução em que não tinham sido

bem-sucedidos, ganhavam metade dos pontos atribuídos a essa questão. Mas, se não fosse capaz de resolver uma questão que tinham resolvido no mini-teste, perdiam metade da classificação atribuída a essa questão. Os alunos gostavam muito de ganhar pontos, mas não de os perderem. Porém, rapidamente se observava o efeito desejado: entre a aula em que resolviam o mini-teste e a próxima aula, em que o recebiam e discutiam, eles passaram a ir estudar e aprender a resolver todas as questões. Discutiam-nas na díade, com outros colegas, perguntavam em casa aos pais, iam ao manual. Mas, observávamos que se empenhavam cada vez mais.

A decisão de quem ía ao quadro discutir determinada questão, permitia que o professor/investigador gerisse algumas questões importantes. Se naquela turma, como na do V. e da M., a maioria dos alunos tinha obtido classificações de nível negativo, era particularmente importante trabalhar a auto-estima e a motivação. Por isso, inicialmente, eram escolhidos alunos que soubessem explicar a resolução, nomeadamente os que tinham obtido classificações de nível negativo em anos lectivos anteriores e, agora, estavam a trabalhar com as quatro alunas com níveis mais elevados. Isto era uma maneira implícita de lhes mostrar, a elas, que aqueles pares eram competentes e de reforçar, para eles, as suas capacidades e competências. Por isso, decidir quem iria discutir as questões dos mini-testes era algo bastante pensado, que reflectia o que seria mais favorável para aquela turma e para cada aluno (César, 2009; César et al., 2014; Machado, 2014; Ventura, 2012).

Estudar todas as semanas também teve impactes positivos nos desempenhos nos testes individuais. Para além disso, ter mini-testes frequentes, desdramatizou o que era responder a um teste, tornando essa mais uma das muitas actividades que os alunos realizavam. Portanto, as avaliações sumativas mais tradicionais, ou seja, os testes e as provas nacionais (vulgo exames), começaram a ser encaradas com mais calma, mas também com uma melhor preparação, em termos de estudo, o que teve impactes muito positivos no sucesso académico. Os alunos realizavam três testes individuais nos 1.º e 2.º períodos, que tinham mais de três meses de aulas, e dois no 3.º período, que era mais curto. Isto significava terem um teste cada mês, cujas datas conheciam desde a segunda semana de aulas, para saberem organizar-se, em termos de estudo. Esta periodicidade e marcação prévia tornavam esta mais uma tarefa que realizavam, com alguma

frequência, desdramatizando as avaliações sumativas. Em cada período, podiam escolher um dos testes individuais e realizar um teste de melhoria, se assim o desejassem. O teste de melhoria abordava os mesmos conteúdos daquele que pretendiam melhorar. Era numa aula, no final do período, que se realizavam os testes de melhoria. Por exemplo, no final do 1.º período, na mesma aula, uns alunos estariam a melhorar o 1.º teste (Outubro), outros o segundo (Novembro) e outros o terceiro (Dezembro), enquanto os que tinham optado por não fazer nenhuma melhoria estavam a resolver tarefas recreativas, relacionadas com a Matemática, mas cujas resoluções não eram contabilizadas na avaliação sumativa. Um resultado significativo é que, mesmo os que optavam por não realizar melhorias, não faltavam àquela aula, o que ilumina o empenho com que tinham passado a encarar a frequência das aulas de Matemática. É de realçar que, em muitas turmas, todos os alunos optaram por fazer melhoria, incluindo alunos que já tinham obtido classificações muito elevadas, mas que ainda queriam tentar melhorar. Mas, se isso não acontecia, os que estavam a resolver outras tarefas tinham particular cuidado em não perturbarem os colegas que estavam a realizar as melhorias, pois percebiam que uma classificação superior poderia impactar positivamente a classificação no final do período. Assim, após três meses de trabalho colaborativo e dialógico (1.º período), o clima, em aula, mostrava já a solidariedade e cumplicidade que existia entre os alunos de cada turma, mesmo quando, anteriormente, havia pouco diálogo intercultural.

Houve um especial cuidado em promover práticas que facilitassem a organização e autonomia dos alunos, quanto à maneira como decidiam os horários de estudo. Para que os alunos se pudessem organizar, os mini-testes e testes estavam marcados desde a 2.ª semana de aulas e estas datas não se alteravam. Se um conteúdo não estava completamente terminado até à data de um teste individual, a parte final desse conteúdo seria abordada no teste seguinte. O mesmo se passava com os mini-testes. Os trabalhos de casa também só eram pedidos uma vez por semana e os alunos tinham uma semana para os resolverem, um dia fixo da semana para os entregarem e para receberem os anteriores, já corrigidos e comentados. Uma vez por período, o trabalho de casa era mais complexo, solicitando a colaboração das famílias ou vizinhos, sendo-lhes dadas duas ou três semanas para os realizarem. Pretendia-se salientar que todos podiam contribuir para a sua

resolução, mesmo os que eram pouco letrados, pois também esses geriam, por exemplo, orçamentos familiares, faziam compras em lojas e supermercados, compravam passes para transportes, ou seja, realizavam tarefas que incluíam informação matemática que podia ser explorada em aula.

Este tipo de estrutura e de rotinas facilitavam a organização e permitiam que cada aluno escolhesse a melhor altura para realizar os trabalhos de casa e o estudo. Como alguns tinham actividades extra-curriculares, desportivas, culturais ou outras, enquanto outros já trabalhavam, saberem previamente as datas das avaliações escritas e decidirem em que dia da semana resolviam os trabalhos de casa, tornava-os mais autónomos, organizados e responsáveis. O mesmo sucedia em relação aos professores/investigadores. Geralmente, um professor de Matemática leccionava quatro turmas. Isso permitia-lhe ter dias diferentes da semana para os mini-testes de cada turma, bem como para receber os trabalhos de casa, o que facilitava a organização e a eficiência das tarefas que tinha de realizar em horário extra lectivo. Portanto, este esquema de avaliação era conveniente para todos: alunos, professores/investigadores e até famílias, se quisessem acompanhar o que os alunos tinham de realizar.

Como sabíamos que alguns alunos tinham pais ou outras pessoas que os podiam auxiliar nos trabalhos de casa, enquanto para outros alunos isso não sucedia, o que contava para a classificação dos trabalhos de casa, era terem, ou não, feito o trabalho. Se não conseguiam concluir a resolução de uma tarefa, por terem alguma dificuldade, tinham de escrever, de forma explícita, a dificuldade que os impedira de continuar, pois era isso que permitiria, depois, explicar-lhes como podiam ultrapassar essa dificuldade, quando o professor/investigador corrigia os trabalhos. Assim, esta forma de funcionamento revelava também uma preocupação com a equidade e a justiça social: pretendia-se que os alunos com mais dificuldades ou cujas famílias eram mais pobres e menos letradas, não fossem prejudicados no que se refere à avaliação sumativa. Este aspecto foi frequentemente reconhecido em conversas informais e nas entrevistas, quer pelos que eram de meios sócio-economicamente desfavorecidos, quer pelos que eram de meios favorecidos. Isso mostra como as formas de avaliação também têm implícitos valores morais e podem subscrever uma abordagem intercultural e inclusiva.

Quando o fazem, assumem uma perspectiva crítica, fomentando uma maior consciência social e capacidade de análise, por parte dos alunos.

Um aspecto que nos parece muito relevante é que, nas turmas do IC, ao contrário do que era frequente acontecer nas escolas, em Portugal, os alunos não obtiveram piores resultados nas provas nacionais (vulgo exames) do que os que tinham obtido durante o ano lectivo. Isto era raro, sobretudo no 12.º ano de escolaridade, mas ilumina que o trabalho realizado no IC era exigente e consciencioso, produzindo resultados que eram consistentes, mesmo a médio e longo prazo, como revelou o *follow-up* e os contactos informais, que alguns alunos mantiveram. O clima, em aula, era descontraído, respeitador de cada um, mas de muito trabalho e exigente, pois acreditávamos que os alunos deveriam aprender os conteúdos e tirar as dúvidas em aula. O trabalho era desenvolvido num espaço de pensamento (Perret-Clermont, 2004), numa comunidade de aprendizagem (Civil, 2007), mas isso não significava facilitismo. Muitos daqueles alunos íam ter de enfrentar diversas barreiras, de precisar de muita resiliência para traçarem as trajectórias de participação ao longo da vida que pretendiam seguir. Por isso, tínhamos de os preparar para conseguirem atingir o que pretendiam e isso significava não só aprenderem conteúdos programáticos, mas também desenvolver capacidades e competências como a organização, a autonomia, a procura e leitura crítica de informação, ou a resiliência.

Critérios de formação das díades

Uma das principais tarefas dos professores/investigadores, durante a primeira semana de aulas, era analisar detalhadamente todas as informações que tinham obtido sobre cada aluno, para decidirem como formar as primeiras díades. Diversos autores salientam a importância da diversidade de capacidades e competências entre os elementos das díades ou pequenos grupos, em diferentes níveis de escolaridade e referindo-se a várias disciplinas (César, 1994, 2003, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b; César & Kumpulainen, 2009; Ligorio & César, 2013; Rossi, Pontecorvo, & Arcidiacono, 2024). A este propósito, Rossi e seus colaboradores (2024), clarificam que "os pequenos grupos eram formados de acordo com um princípio de heterogeneidade, calibrada pelos níveis de

conceptualização" (p. 180). Assim, embora usando critérios diferentes para estabelecer a heterogeneidade, nomeadamente em função do ano de escolaridade e da disciplina a que se referiam, esta é reconhecida como facilitadora de processos interactivos mais ricos e mais frutuosos, em termos de aprendizagem e desenvolvimento.

Havia critérios de formação das primeiras díades que eram comuns a todas as turmas do IC, pois procurávamos diversificar, em cada díade: (1) capacidades e competências, que deveriam ser complementares; (2) sucesso académico; (3) género; (4) cultura em que participavam no contexto familiar; e (5) alunos sinalizados como necessitando de AESE (César et al., 2014). As capacidades e competências diferentes, mas complementares (ex: um com o raciocínio analítico preferencial, outro com o raciocínio espacial ou geométrico; preferir estratégias de resolução aritméticas ou algébricas vs. optar por uma representação gráfica ou uma estratégia de simplificação), promoviam mais progressos em termos de aprendizagens e de desenvolvimento. Diferenciar o sucesso académico evitava reforçar a noção de que só aprendemos com quem tem o mesmo nível de aproveitamento ou um nível superior. Também promovia os desempenhos académicos de ambos os alunos, pois muitos daqueles com insucesso académico, apresentavam capacidades e competências bastante desenvolvidas, por vezes mesmo mais desenvolvidas do que os que obtinham elevado sucesso académico, como ilustra a díade formada pelo V. e pela M. (César, 2003, 2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b; César & Machado, 2024a). Diferenciar o género fomentava as interacções sociais entre pares que, muitas vezes, pouco comunicavam e se conheciam menos, facilitando a criação de uma comunidade de aprendizagem (Civil, 2007) e evitando a discriminação negativa de género. Escolher, para cada díade, pessoas que participavam em culturas diferentes também promovia a aceitação delas, porque se passavam a conhecer melhor e a interagir mais, estimulando a socialização alargada e o diálogo intercultural. Quando as turmas incluíam alunos que necessitavam de AESE, estes eram pares de outros sem essas necessidades, para que os que não as apresentavam aprendessem a conhecer e interagir com estes pares. Assim, a formação das primeiras díades era um forte contributo para a construção de uma cultura de sala de aula (Cobb & Bauersfeld,

2012) que respeitasse os princípios de uma educação intercultural e inclusiva, promovendo o respeito e a celebração da diferença.

Mesmo quando as primeiras díades estavam a funcionar de acordo com o esperado, era importante mudar os pares, ao fim de um mês ou dois de trabalho. Isso acontecia por diversos motivos: (1) evitar situações de dependência; (2) os alunos desenvolverem outras capacidades e competências; (3) promover os desempenhos matemáticos de todos os alunos; (4) alargar a socialização e o diálogo intercultural na turma; e (5) contribuir para desenvolver uma comunidade de aprendizagem (Civil, 2007). Quando falamos em evitar situações de dependência, referimo-nos a que um determinado aluno não se convencesse de que apenas conseguia atingir sucesso académico se trabalhasse com aquele par. Isso é importante, pois também se pretendia desenvolver a autonomia e facilitar as transições e mobilização de conhecimentos, em diferentes contextos, cenários e situações. Para além disso, ao fim de algum tempo, o que aqueles dois alunos podiam progredir, um com o outro, já estava atingido e era preferível que fossem trabalhar com outros pares, para desenvolverem outras capacidades e competências, bem como para progredirem nos desempenhos matemáticos. O trabalho em díade também possibilitava que conhecessem melhor os colegas, nomeadamente saber como eles raciocinavam e que estratégias de resolução preferiam. Isso contribuía para formar uma comunidade de aprendizagem (Civil, 2007), algo essencial para facilitar o acesso ao sucesso escolar.

Baseando-se nos critérios gerais de formação das primeiras díades, depois era preciso analisar as características dos alunos de cada turma (César, 2024b), nomeadamente no que se refere aos Modeladores Pessoais de Desempenho (MPD), para tomar as decisões mais adequadas. Este trabalho era mais fácil numas turmas do que noutras. Quanto mais alunos tivessem bastantes capacidades e competências que conseguissem mobilizar e que fossem complementares (Quadrantes 1 e 4), e/ou classificações positivas de anos lectivos anteriores (Quadrantes 1 e 2), mais fácil era decidir a formação das díades. As Figuras 64 e 65 mostram como a turma do V. e da M. era muito mais desafiadora do que a turma da Tatiana e do Tomás, quanto à formação das primeiras díades e das que seriam formadas em Outubro ou Novembro, quando as díades e a planta da sala de aula (regulação espacial) eram alteradas.

É importante realçar que uma mesma posição no que se refere às capacidades e competências não significa que aquelas sejam semelhantes. Mesmo na Posição 1, que corresponde a ser bem-sucedido em todas as tarefas do IACC, fornecendo explicações completas, as abordagens, raciocínios e estratégias de resolução podem ser diferentes, pelo que dois alunos na Posição 1 podem mobilizar capacidades e competências complementares. A partir da Posição 3, isso é ainda mais nítido, pois as tarefas resolvidas com sucesso podem ser diferentes, apelando a capacidades e competências diversas. Assim, a posição ocupada na nuvem de pontos permite ter uma primeira percepção de como aquele aluno se posiciona, mas, posteriormente, é necessária uma análise mais fina, que tenha em consideração as tarefas em que foi bem-sucedido, o tipo de capacidades e competências que mobilizou, bem como as formas preferenciais de fazer e aprender Matemática. Foi para esta análise mais fina que a equipa do projecto IC preparou diversos documentos (Machado, 2014; Ventura, 2012).

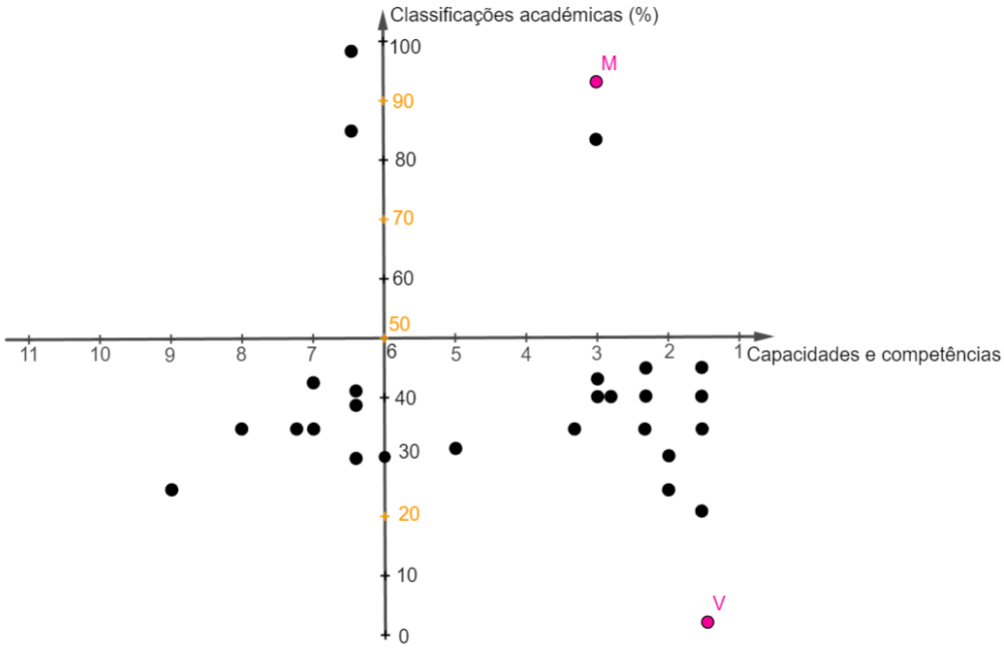
Nas turmas como a da Tatiana e do Tomás, alteravam-se as díades e a planta de sala de aula mais tarde, geralmente em meados de Novembro. Nas turmas mais desafiadoras, como a do V. e da M., as alterações eram feitas em finais de Outubro, para tentar que mais alunos conseguissem atingir um nível positivo no 1.º período. Em algumas turmas com alunos com maiores dificuldades de aprendizagem, como relatam César (2014), César e seus colaboradores (2014) e César e Santos (2006), uma determinada díade podia ser trocada mais frequentemente, para garantir o progresso de todos os alunos. Assim, a decisão de quando alterar as díades era do professor/investigador e era tomada em função das características daquela turma e das diferentes díades, podendo ser todas elas mudadas ou apenas uma parte. Isto significa que os critérios utilizados analisavam cada aluno, em particular, e também a turma, no geral. Este trabalho tinha a supervisão da equipa do projecto IC, enquanto parte da formação contínua que era efectuada, no primeiro ano em que aquele professor participava no IC e, depois, era gerido de forma autónoma.

Na Figura 64 vemos a nuvem de pontos da turma do V. e da M., no que se refere aos modeladores pessoais de desempenho (MPD) (César, 2024b), ou seja, conjugando as classificações académicas obtidas no ano lectivo anterior e as

capacidades e competências avaliadas na primeira semana de aulas, nomeadamente através do IACC.

Figura 64

Nuvem de pontos dos MPD na turma do V. e da M.



Habitualmente, os professores apenas tinham em consideração as classificações obtidas nos anos lectivos anteriores, bem como a indisciplina, que caracterizava a turma ou determinados alunos. Por isso mesmo, quando falavam (conversas informais) ou escreviam (relatórios) sobre esta turma, os comentários eram bastante negativos, excepto no que se referia às quatro alunas com Nível 4 ou Nível 5 (Quadrantes 1 e 2). Estas eram descritas como "interessadas, com facilidade de aprendizagem e respeitadoras" ou "bem-comportadas" (diversas conversas informais, desde Junho 1997). Se olharmos para esta nuvem de pontos apenas com esses dois critérios, a turma pode ser descrita como "muito fraca" ou "a evitar", como também ouvimos em várias conversas informais. Isso ilustra, de forma nítida, a importância de se avaliarem as capacidades e competências dos alunos, desde a primeira semana de aulas. Foi termos acesso aos resultados do IACC, da TIP1, do Q1 e da observação, que nos permitiu cunhar o conceito de

modeladores pessoais de desempenho (MPD) (César, 2024b) e ter uma compreensão diferente desta turma, identificando nela potencialidades muito maiores quanto à progressão dos desempenhos matemáticos dos alunos.

A primeira característica que nos chamou a atenção foi existirem apenas quatro alunas com Nível 4 ou 5, todas elas participando na cultura dominante e vivendo no bairro novo, com melhores condições económicas e ninguém com Nível 3. Que todos os alunos do bairro de barracas (que designaremos apenas por bairro) tivessem Nível 2 e, um deles, o V., Nível 1, pareceu-nos indicar que as suas formas preferenciais de fazer e aprender Matemática não eram aceites, o que os prejudicava quanto aos seus desempenhos matemáticos. Também percebemos, quando pedimos acesso a informações mais detalhadas sobre as percentagens obtidas no ano lectivo anterior, que alguns deles tinham obtido Nível 2, mesmo quando estavam muito perto do Nível 3, o que poderia indicar baixas expectativas e alguns preconceitos, por parte dos professores. Também evidenciava uma auto-estima negativa, enquanto aprendentes, por parte dos alunos, o que os levava a terem baixas expectativas sobre os seus próprios desempenhos matemáticos.

No entanto, como considerávamos as capacidades e competências um critério muito importante na previsão da progressão dos alunos, esta turma pareceu-nos muito promissora: (1) Havia 14 alunos com capacidades e competências, relacionadas com a aprendizagem da Matemática, muito desenvolvidas (Quadrante 4); (2) destes, sete alunos tinham Nível 2, no ano lectivo anterior, mas com quase 40% ou mais, ou seja, bastante próximo do Nível 3, o que pressupunha que facilmente conseguiriam progredir nos desempenhos matemáticos; (3) dos restantes sete, seis tinham capacidades e competências tão desenvolvidas, que facilmente conseguiriam progredir nos desempenhos matemáticos, até porque já tinham percebido que, com aquele professor/investigador, podiam usar as suas formas naturais de fazer e aprender Matemática; (4) seis dos alunos que estavam no Quadrante 3, tinham também bastantes capacidades e competências que conseguiam mobilizar e apenas precisavam de trabalhar na sua ZDP (César, 2009; Vygotsky, 1934/1962), para conseguirem ter acesso ao raciocínio abstracto (RA); (5) destes, três tinham obtido uma classificação de Nível 2, mas com 40% ou superior a isso; (6) apenas um aluno tinha obtido um Nível 2 bastante baixo e

apresentava menos capacidades e competências que já conseguia mobilizar e outro apenas mostrara ter acesso ao RA; e (7) as capacidades e competências que tínhamos conseguido identificar permitiam formar díades em que elas fossem complementares, como era desejável. Assim, a turma poderia progredir bastante, desde o 1.º período, se as decisões de formação das díades fossem cuidadosas e baseadas nos MPD (César, 2024b), e a escolha das tarefas a propor fosse criteriosa e adequada àquela turma.

A díade formada pelo V. e pela M. é paradigmática, porque ilustra o que também aconteceu em muitas outras díades. Nesta turma, em que tantos alunos (N=23) tinham obtido Nível 2 (nível negativo) e um (V.) obtivera Nível 1, era essencial que mais alunos conseguissem atingir o Nível 3 rapidamente. Por isso, as quatro alunas que tinham obtido Nível 4 e Nível 5 tiveram pares masculinos, que participavam na cultura de Cabo Verde, que mobilizavam capacidades e competências complementares e, além disso, mais desenvolvidas do que as delas. Estes não eram os pares que elas ou eles teriam escolhido. Bem pelo contrário, pois, uns de forma mais nítida, outros de forma mais subtil, mostraram o seu desagrado, como ilustra César (2009, 2024b). Mas, o tempo veio a dar-nos razão: todos progrediram muito naquele mês e meio em que trabalharam juntos. Três delas subiram o seu nível de aproveitamento (todas tiveram Nível 5 no primeiro teste individual e a M. teve uma percentagem mais elevada do que habitualmente) e a outra, que já obtinha classificações entre 98 e 100%, manteve-as. Todas elas desenvolveram capacidades e competências de que precisavam, no ensino secundário, como o raciocínio espacial e geométrico. Quanto aos quatro rapazes que participaram nessas díades, todos obtiveram Nível 3 no primeiro teste e também aprenderam outras abordagens, raciocínios e estratégias de resolução. Portanto, escolher estas primeiras díades revelou-se ajustado, tanto para cada um destes oito alunos, como para a turma.

Esta nuvem de pontos também mostra os outros pares que convinha formar. Alunos que mobilizam muitas capacidades e competências que são complementares, trabalhando em conjunto, mesmo tendo ambos obtido Nível 2, conseguiam progredir. Isso explica que, no primeiro teste individual, realizado em finais de Outubro, ou seja, um mês e meio depois das aulas começarem, houvesse 16 alunos com Nível 3. Para muitos deles, isto era algo que nunca tinha acontecido

anteriormente. Assim, esta turma passou a ter 20 dos 28 alunos com uma classificação de nível positivo, o que constituía um enorme progresso, só possível por terem sido considerados os MPD na formação das primeiras díades (César, 2024b).

Esta nuvem de pontos também permitiu identificar as três díades que mais precisavam do professor/investigador, no início da resolução das tarefas. Assim, conhecer as capacidades e competências dos alunos, desde a primeira semana de aulas, foi um critério essencial para a promoção de uma educação intercultural e inclusiva. Cunhar o conceito de modeladores pessoais de desempenho (MPD) (César, 2024b) permitiu compreender, de forma mais aprofundada, como estes critérios contribuem para promover os desempenhos académicos, e como os podem bloquear, se não forem tidos em consideração pelos professores.

Quando se observa atentamente a Figura 64 percebe-se mais nitidamente o potencial do trabalho colaborativo e dialógico, quando associado a uma educação intercultural e inclusiva, que respeita as formas naturais de fazer e aprender Matemática, nomeadamente as que se relacionam com a influência da L1 nas abordagens, raciocínios e estratégias de resolução preferenciais (César, 2024b; César & Machado, 2024a). Nesta turma, que apenas trabalhou um ano lectivo no projecto IC, a evidência mais relevante é que todos os alunos concluíram o 3.º ciclo do ensino básico, algo que a escola, bem como as famílias deles, não pensavam que fosse possível conseguir, como ouvimos diversas vezes, em conversas informais. Isso era importante porque, naquela época, ter este ciclo de estudos completo permitia tirar a carta de condução, dava acesso a cursos profissionais, a empregos na função pública, a poder ter um pequeno negócio em nome próprio, entre muitas outras vantagens.

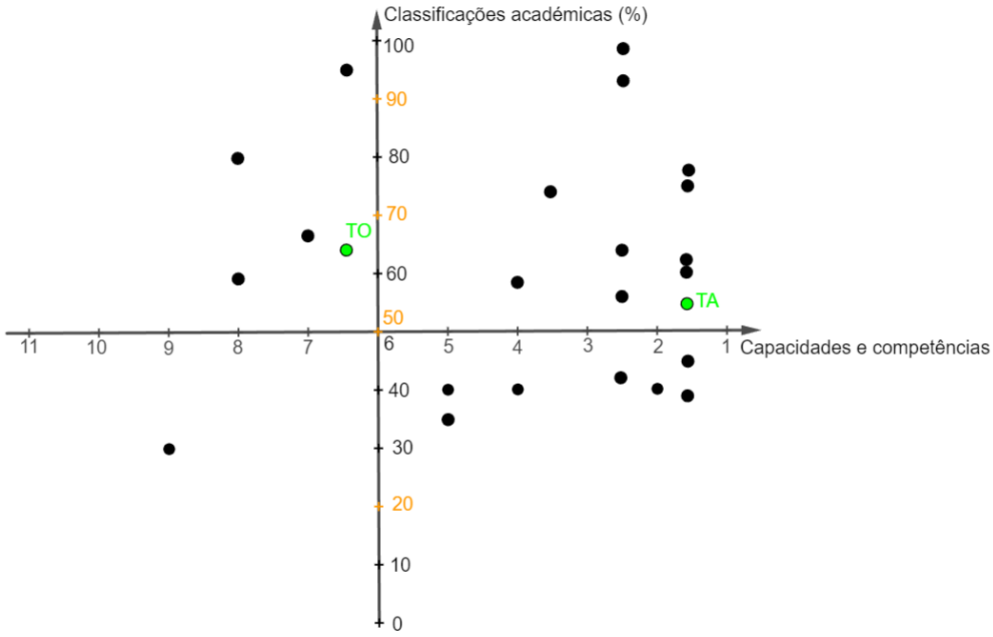
Para além disso, só dois alunos abandonaram a Escola quando terminaram o 9.º ano de escolaridade e ambos tinham já 18 anos de idade, ou seja, já tinham atingido a maioridade. Dos restantes 26, uns inscreveram-se no ensino secundário e outros em cursos profissionais, equiparados ao 12.º ano de escolaridade (ensino secundário completo), que concluíram e que lhes permitiram ter acesso a empregos com melhores salários e condições de trabalho. Muitos dos que tinham nível negativo até ao 9.º ano de escolaridade, inscreveram-se no ensino secundário, que concluíram com médias suficientemente altas para terem acesso ao

ensino superior. Com a crise económica de 2008, alguns emigraram, mas conseguiram empregos compatíveis com os estudos que tinham realizado e, sobretudo, nessa altura, bem como durante a pandemia, vimos como os laços entre eles se mantinham, pois contactavam-se, digitalmente e ajudavam-se, quando perdiam os empregos. Por isso, o *follow-up* mostrou que este ano foi transformador para estes alunos, nomeadamente quanto às trajectórias de participação ao longo da vida (César, 2009). O *follow-up* ilumina, de forma nítida, como as características da 1.ª semana de aulas, conhecer bem as capacidades e competências dos alunos desde essa semana, as mensagens implícitas e os mecanismos de *inter-empowerment* foram fundamentais para estes progressos. Daí a importância do conceito de modeladores pessoais de desempenho (MPD) (César, 2024b), ilustrado nas Figuras 2, 64 e 65.

Na Figura 65 vemos os MPD referentes à turma da Tatiana e do Tomás. Como se nota, logo numa primeira observação, esta turma era bastante diferente da turma do V. e da M., sobretudo no que se refere às classificações obtidas no ano lectivo anterior: em 24 alunos, oito tinham obtido um nível negativo e 16 um nível positivo. Para além disso, havia sete alunos que tinham obtido Nível 4 ou 5 (os mais elevados) e dois deles participavam na cultura cabo-verdiana, o que não acontecia na turma do V. e da M. (Figura 64). Porém, há que salientar que, tratando-se de uma turma do 7.º ano de escolaridade, estas classificações tinham sido obtidas no 2.º ciclo do ensino básico (5.º e 6.º ano de escolaridade) e noutra escola, onde os critérios de avaliação eram menos exigentes. Tratando-se de alunos mais novos, pois muitos deles tinham a idade esperada para este ano de escolaridade, não é de estranhar que alguns (N=6) mobilizem o raciocínio concreto (RC). No entanto, haver 18 alunos com acesso ao raciocínio abstracto (RA) mostra que os alunos desta turma tinham capacidades e competências bastante desenvolvidas, em relação ao que era habitual, naquele ano de escolaridade e nível etário.

Figura 65

Nuvem de pontos dos MPD na turma da Tatiana e do Tomás



Numa primeira observação, nota-se que existem muito mais alunos no Quadrante 1 (N=11) do que na Figura 64, ou seja, que obtiveram nível positivo e que mobilizam raciocínio abstracto (RA) e outras capacidades e competências relacionadas com a Matemática. Destes, cinco têm capacidades e competências bastante desenvolvidas (Posição 2). Também nos que se encontram no Quadrante 4 (N=7) notamos grandes diferenças em relação à turma do V. e da M.: nenhum obteve Nível 1 e seis obtiveram Nível 2, mas com 40% ou mais. Por isso, as possibilidades de progressão são nítidas. Existe apenas um aluno no Quadrante 3, que precisa de um par escolhido com particular atenção, pois obteve a classificação mais baixa da turma e não mobiliza muitas capacidades e competências. No Quadrante 2 (N=5) estão alunos que mobilizam várias competências, mas ainda não têm acesso ao raciocínio abstracto (RA), o que acontece frequentemente, neste ano de escolaridade e nestes níveis etários. Ao trabalharem em díade com alunos que já mobilizam o RA e propondo-lhes tarefas que lhes permitam trabalhar na ZDP (César, 2009; Vygotsky, 1934/1962), as probabilidades de que transitem para o RA são elevadas, tanto mais que esta turma fez parte do projecto

IC durante todo o 3.º ciclo do ensino básico, o que corresponde a três anos lectivos.

Como havia nove alunos que tinham obtido Nível 3 (nível positivo mais baixo) no ano lectivo anterior, havendo vários deles que mobilizavam bastantes capacidades e competências complementares, isso explica que a Tatiana e o Tomás tenham ficado na mesma díade. Apesar de procurarmos diversificar este parâmetro em cada díade, quando mais de um terço da turma obteve Nível 3, este pode não ser o critério preponderante. No entanto, mesmo quando obtiveram Nível 3, este pode ter características diferentes, como acontecia com o Tomás, que tinha obtido também algumas avaliações de Nível 4, enquanto a Tatiana tinha obtido algumas de Nível 2, embora a média correspondesse ao Nível 3. Mas, se ele obtinha melhores classificações, ela mobilizava mais capacidades e competências, além de ambos terem acesso a diferentes abordagens, raciocínios e estratégias de resolução. Portanto, ambos podiam progredir muito se formassem uma díade, como veio a suceder, enquanto trabalharam os dois e, também, quando mudaram de par, posteriormente.

Numa turma como esta, é muito mais fácil decidir como formar as primeiras díades do que na turma do V. e da M., como facilmente se compreende, confrontando a Figura 64 e a Figura 65. Nesta turma há diversos pares que poderiam ter sido escolhidos para a Tatiana e para o Tomás. Porém, algumas características das representações sociais, bem como da sua forma de agir, tornavam esta díade particularmente adequada, algo que se veio a confirmar, pela evolução dos desempenhos matemáticos destes dois alunos. Como seria de prever, analisando a Figura 65, a partir do 8.º ano de escolaridade nenhum aluno obteve níveis de avaliação negativos no final do período e, no 9.º ano de escolaridade, isso também não sucedeu na prova final de escola (vulgo exame), que era elaborada por outros professores daquela escola, que não lecionavam o 9.º ano de escolaridade.

Uma escola desafiadora e a mediação cultural bi-unívoca

O primeiro contacto com esta escola surgiu quando César (1994) realizou a tese de doutoramento, nos inícios da década de 90. O projecto IC funcionou

nesta escola desde 1994/95 (ano de preparação), tendo trabalhado, em aula, em díades e pequenos grupos, de forma colaborativa e dialógica, desde 1996/97. A escola frequentada pelo V. e a M. (iniciais dos seus nomes próprios) e pela Tatiana e Tomás (nomes fictícios) tinha dois terços dos alunos provenientes de um bairro de habitações precárias (vulgo barracas), clandestino, sem saneamento básico, água canalizada e com poucas condições de habitação. A maioria das casas tinha uma só divisão onde viviam várias pessoas. Durante o dia, aí se cozinhava, comia e realizavam as diversas actividades. À noite, estendiam-se colchões e dormia-se. Muitas destas habitações não tinham casa de banho e as lavagens eram feitas, de forma sumária, com água trazida de uma fonte. Para os alunos, era difícil estudar ou realizar trabalhos de casa, sobretudo sem sujar os cadernos e livros, pois a mesa onde o faziam também era a das refeições. Na escola, até o projecto IC ter começado a funcionar, muitas destas condições não eram tidas em consideração, o que penalizava os alunos que ali viviam. Foi a vontade da Direcção da escola de fomentar o sucesso escolar e diminuir o fosso entre as diversas culturas que fez o IC começar a trabalhar nesta escola.

Neste bairro vivia uma grande comunidade cabo-verdiana. Muitos dos alunos da escola eram de segunda ou terceira geração. Portanto, eram portugueses. Mas em casa, no bairro, com a família e amigos, falavam crioulo e era nesta língua que eram fluentes. Era em crioulo que pensavam, exprimiam sentimentos, cantavam, sonhavam, faziam contas e geriam o dinheiro. Alguns pais e, sobretudo, as mães, só falavam crioulo, apenas conhecendo expressões básicas em português. Quando eram chamados à escola, geralmente não compareciam. Como não falavam português e os professores não falavam crioulo, achavam inútil irem à escola, pois não conseguiam comunicar. Para além disso, na cultura de Cabo Verde existe uma noção de família alargada e, quando há decisões importantes, até vizinhos podem participar. Por isso, se fossem à escola, queriam ir acompanhados por várias pessoas, algo que não fazia parte da cultura de escola. Isso levava-os, por exemplo, a não pedirem os subsídios de alimentação e material escolar a que tinham direito, pois não sabiam que eles existiam, ou não conseguiam preencher os papéis necessários. Algo semelhante acontecia com os portugueses muito pobres, muitos deles analfabetos funcionais, que também habitavam esse bairro. Entre estas duas comunidades culturais que habitavam aquele

bairro não havia muita comunicação, embora também não existissem grandes conflitos. Algo essencial, para incrementar o sucesso escolar, era promover a comunicação e o diálogo intercultural, usando dinâmicas regulatórias de participação Escola/Família, que César (2013b) descreveu detalhadamente.

O restante terço da população escolar era composta por alunos de classe média ou média alta, que viviam num bairro novo, de apartamentos e vivendas. A maior parte destas famílias tinha acesso a diversos bens culturais valorizados pela Escola, como livros, filmes, teatro, exposições, concertos e viagens. A maioria dos pais tinha uma licenciatura e empregos socialmente valorizados, com salários médios ou altos. A expectativa destas famílias era de que os filhos tivessem trajectórias de participação ao longo da vida que incluíam estudos longos, ao nível do ensino superior, para terem acesso a uma carreira profissional com melhores salários, mais possibilidades de promoção na carreira e mais reconhecimento social. Por isso, investiam na formação educativa e quase sempre vinham à escola quando eram convocados. Para além disso, eram capazes de perceber as regras da Escola, ou seja, o meta-contrato didáctico (Schubauer-Leoni, 1986), bem como de ajudar os filhos, se estes tivessem dúvidas em relação aos conhecimentos escolares, ou de lhes pagar lições privadas (vulgo explicações). Algo semelhante já fora descrito por César (2012a), num estudo internacional (projecto FAMA), onde identificara as habilitações literárias dos pais como um critério importante para o acesso ao sucesso escolar.

É de salientar que estas famílias poderiam ter optado por inscrever os filhos numa escola privada. Mas tinham preferido que frequentassem a escola do bairro novo, onde viviam, o que lhes permitia deslocarem-se a pé, de forma autónoma. O bairro novo ficava à frente da escola, dando acesso directo ao portão de entrada. Por isso, de manhã, era frequente ver grupos de alunos, deste novo bairro, que se deslocavam para a escola. Apesar desta escolha, estas famílias temiam a proximidade do outro bairro, que ficava nas traseiras da escola e ocupava uma vasta área, bem como as pessoas que lá habitavam. Por vezes havia assaltos ou altercações à saída da escola, o que criava alguma sensação de insegurança. Assim, o diálogo intercultural e as dinâmicas regulatórias de participação Escola/Família (César, 2013b) também teriam de facilitar a comunicação entre esta

comunidade do bairro novo e as duas que habitavam no outro bairro, economicamente muito carenciado.

Mediação cultural bi-unívoca

Quando o projecto IC começou a ser desenvolvido nesta escola, tornou-se evidente que, para promover o sucesso escolar e evitar formas de actuação disruptivas, era essencial implementar dinâmicas regulatórias de participação Escola/Família, como as descritas por César (2013b). Às dificuldades escolares associava-se uma extrema pobreza de dois terços dos alunos. Para que as práticas, em aula, resultassem, era necessário começar por garantir melhores condições de vida, o que levou a escola a recorrer a diversas medidas: (1) inspirados nas mesas de voto das eleições legislativas, resolvemos fazer algo semelhante para as inscrições, que decorreram em diversas salas, permitindo ter pessoas (professores, funcionários administrativos) que ajudavam a preencher os papéis dos Serviços de Acção Social Escolar (SASE), para quem tinha direito a estes subsídios; (2) criar espaços (biblioteca, centro de recursos áudio-visuais, salas de alunos e de estudo) que possibilitassem que os alunos estudassem e realizassem os trabalhos de casa na escola, se assim o desejassem; (3) comprar e instalar cacifos, no *hall* de entrada e em cada sala de aula, onde os alunos podiam guardar o material escolar; (4) mudar a organização escolar de modo a que cada turma tivesse a maioria das aulas numa mesma sala, para que aí guardassem os materiais e também para existir um sentimento de pertença, que favorecia a manutenção do material escolar nas condições desejadas; (5) como dois terços dos alunos passaram a ter SASE, garantir pequeno almoço (assim que chegavam à escola), lanche de meio da manhã e da tarde, bem como almoço, pois em anos lectivos anteriores, alguns alunos sentiram-se mal, chegando mesmo a desmaiar, por não terem comido (pequeno almoço, ou mesmo jantar, no dia anterior); (6) aumentar a oferta de livros na biblioteca, para fomentar o gosto pela leitura, bem como de computadores e outros materiais áudio-visuais, facilitando as aprendizagens; e (7) ter um horário em que diversos professores, voluntariamente e durante os tempos não lectivos, estavam disponíveis para tirar dúvidas a alunos, que também estivessem sem aulas. Tal como César (2012b) e César e Ainscow (2006)

sublinharam, a organização escolar é uma questão essencial na promoção de uma educação intercultural e inclusiva.

Estas medidas, que parecem muito simples, fizeram uma enorme diferença e, sobretudo, aumentaram a comunicação dos alunos e das respectivas famílias, com os outros agentes educativos. Porém, até aqui, tratava-se de medidas decididas e implementadas apenas pela cultura dominante, ou seja, era uma mediação cultural unívoca (César, 2017). Mas sabíamos que precisávamos de fomentar o diálogo intercultural, pois as três comunidades em que participavam os alunos e as famílias não comunicavam entre si. Mesmo no bairro de habitações precárias, pouco contacto havia entre os que participavam na cultura cabo-verdiana e os de cultura portuguesa. Para além disso, antes das férias de Natal, apareceram mais formas de actuação disruptivas, algo que já esperávamos, por a época de Natal ser emocionalmente desestabilizadora para pessoas pobres e famílias pouco estruturadas. Porém, interpretámos mal este fenómeno: pensámos que as actuações disruptivas eram devidas à falta de presentes, típicos daquela época nas famílias com mais possibilidades financeiras, e contactámos empresas locais, que nos garantiram um pequeno presente para cada aluno (ex: uma caneta, uma T-shirt, um boné). Mas, quando foi a festa de Natal, para a qual convidámos as famílias e onde tínhamos preparado um lanche com sumos, bolos, bolachas e sandes, percebemos que a questão era outra. Os alunos estavam mais agitados porque 17 dias de férias eram 17 dias sem as refeições da escola. Naquele momento, não conseguimos alterar isso, pois as questões burocráticas (ex: autorizações do Ministério da Educação) não o permitiam. Mas, nas férias da Páscoa, já funcionámos de uma maneira mais adaptada: a escola precisava de alguns arranjos (canalização, carpintaria, pinturas, jardins) e muitos dos pais e antigos alunos trabalhavam na construção civil. Todos os que tinham mais de 16 anos podiam, legalmente, trabalhar. Assim, eles fizeram, de forma voluntária e gratuita, os arranjos na escola, aos fins-de-semana e ao final da tarde, e o dinheiro que seria usado para esses arranjos foi utilizado nas refeições de férias. Esta decisão foi tomada de forma conjunta pela Direcção da escola e alguns representantes das famílias e alunos dos dois bairros, tratando-se já de uma mediação cultural bi-unívoca (César, 2017). Depois, obtivemos a autorização do Ministério da Educação. Assim, havia um trabalho burocrático, muitas vezes longo e desanimador, mas essencial

para termos as autorizações legais necessárias e implementarmos medidas regulatórias de participação Escola/Família (César, 2013b).

Também conseguimos que alguns antigos alunos e pais, das três culturas, fizessem parte de uma comissão que passou a decidir as medidas de mediação intercultural necessárias, passando a utilizar uma mediação cultural bi-unívoca (César, 2017). Assim, decidimos, por sugestão dos pais e alguns professores, criar clubes de aprendizagem das várias valências de cada cultura: uns ensinavam crioulo, outros ensinavam português; uns comida cabo-verdiana, outros portuguesa; o mesmo acontecendo para danças, vestuário, artesanato e música. A escola tornou-se muito ativa aos fins de tarde e sábados de manhã, pois havia clubes a funcionar e os formadores eram das várias culturas e de diferentes idades, entre familiares, alunos e professores. Alguns dos alunos que, anteriormente, apresentavam mais actuações disruptivas, foram excelentes formadores, muito empenhados e responsáveis. Para além disso, também se criaram clubes para aprender a ler e a escrever (a pedido dos familiares que eram analfabetos), clubes de leitura com literatura cabo-verdiana e portuguesa, clubes de teatro com peças de várias culturas e outras escritas pelos alunos, por vezes com a colaboração das famílias, que relatavam oralmente o que os alunos, depois, escreviam.

Por último, depois de muitas diligências burocráticas, conseguimos verba para mais computadores e a escola passou a estar aberta aos fins-de-semana, para a comunidade social envolvente poder usar esses recursos. Esta abertura à comunidade social permitiu poupar muito dinheiro em policiamento e acabar com os assaltos à escola, que eram frequentes. A partir do momento em que todos podiam usar os recursos, passaram a sentir a escola como sendo deles e este sentimento de pertença, de inclusão e partilha, pacificou a zona da escola, criando laços entre as diversas comunidades culturais. Até os comerciantes da zona se aperceberam desta mudança e também quiseram participar nela, oferecendo pequenas lembranças para épocas festivas, ou alimentos em fim de vida, mas ainda dentro dos prazos, para a alimentação. Por isso, a mediação cultural bi-unívoca teve impactes mesmo na comunidade social, exterior à escola, mas que fazia parte dos espaços envolventes.

Assim, rapidamente passámos de dinâmicas regulatórias de participação Escola/Família baseadas numa mediação cultural unívoca, decidida apenas pela

cultura dominante e por parte dos professores, para uma mediação cultural bi-unívoca (César, 2017), onde as decisões, implementação das práticas e supervisão/avaliação dos resultados obtidos, eram geridas por elementos das diversas culturas. Convém realçar que, quando começámos a usar mediação cultural bi-unívoca, este constructo não estava cunhado e descrevíamo-la apenas como dinâmicas regulatórias de participação Escola/Família (César, 2013b), sem distinguir estas duas formas de mediação cultural (unívoca e bi-unívoca). Foi quando realizámos a meta-análise de todo o *corpus* empírico do projecto IC, a partir de 2016, que, confrontando as dinâmicas regulatórias de participação Escola/Família usadas em diferentes escolas, César (2017) cunhou este constructo. Desde aí, tornou-se claro que, nas escolas onde se utilizava a mediação cultural bi-unívoca, os resultados eram mais nítidos e pregnantes, que havia mais impactes positivos, que envolviam até a comunidade social envolvente. Assim, este tipo de mediação foi um importante contributo para o empoderamento e para a promoção do sucesso escolar, diminuindo os conflitos entre *I-* e *Me-positions* (César, 2009, 2013a, 2013b, 2014, 2017), facilitando que os alunos sócio-economicamente mais desfavorecidos traçassem trajectórias de participação ao longo da vida que incluíam percursos escolares mais longos, estágios profissionais e procura de empregos, que os faziam sentir mais realizados.

Díade 1 – V. e M.: Da desconfiança e desagrado, à colaboração e admiração

Informações prévias – preparação do ano lectivo

O V. e a M. frequentavam esta escola e a turma deles participou no projecto IC no 9.º ano de escolaridade (1997/98), sendo lecionada por um professor/investigador estagiário. Nessa época, os professores/estagiários eram responsáveis por leccionar duas turmas, desempenhando todas as funções inerentes. Esta era também uma característica do projecto IC: contribuir para a formação inicial de professores, através de cursos e acções de formação, preparados e dinamizados pela equipa do IC, desde o 2.º semestre do ano lectivo que antecedia o estágio,

possibilitando que os futuros professores estagiários fizessem parte da equipa do IC e começassem, desde esse ano, a divulgar resultados em eventos da especialidade (incluindo as actas) e em artigos de revistas científicas. Isso criava uma dinâmica particularmente interessante, porque a equipa central do IC incluía desde professores com mais de 30 anos de serviço, a jovens estagiários, discutindo dialogicamente e de forma colaborativa os conceitos teóricos, a metodologia de investigação, as práticas e os documentos escritos que eram produzidos, o que dava origem a contributos muito ricos e diversificados (Machado, 2014; Ventura, 2012).

Esta turma tinha características desafiantes: era formada por 28 alunos, a maioria (24) oriunda do bairro e com bastante insucesso académico, nomeadamente a Matemática. Três destas alunas tinham Nível 2 a Matemática (nível negativo, mas perto do Nível 3, nível positivo), pelo que afirmaram no Q1. Mas nenhum aluno do bairro tinha obtido um nível positivo no ano lectivo anterior. Logo, havia 24 alunos com nível negativo a Matemática. É de salientar que havia mais sete que tinham um Nível 2 acima de 40%, mas não sabiam ou não acreditavam nisso, sendo isto particularmente frequente entre rapazes que participavam na cultura cabo-verdiana, provavelmente porque viam as suas formas naturais de fazer e aprender Matemática desvalorizadas, em aula, nos anos lectivos anteriores.

Só quatro alunas tinham obtido classificações de nível positivo a Matemática (Níveis 4 e 5, os mais elevados). Viviam no novo bairro, pelo que estavam bastante isoladas dos restantes alunos da turma. Eram apreciadas pelos professores, pelos seus desempenhos, por serem cumpridoras e trazerem os materiais necessários, mas eram consideradas convencidas ou "betinhas e demasiado certinhas" (V., E1, Dezembro 1997) pelos alunos do bairro, que se afastavam delas nas aulas e nos intervalos. Nos intervalos, elas procuravam a companhia de amigos de outras turmas e, nas aulas, estavam próximas umas das outras. Naquela turma, onde tantos alunos vivenciavam insucesso académico, era muito importante perceber que capacidades e competências estes alunos conseguiam mobilizar (César, 2024b), pois seria a partir dessas capacidades e competências que se poderia começar a construir conhecimento matemático, a promover a aprendizagem e o desenvolvimento. Para além disso, também seriam as capacidades e

competências que permitiriam saber como formar as primeiras díades e fomentar o trabalho colaborativo e dialógico, essencial para criar coesão na turma.

O V. era famoso naquela escola, pois protagonizara discussões, com alguns professores, em aula, em que argumentara com calma, levando-os a sentirem-se intimidados pela sua lógica e começarem a gritar. Em algumas dessas situações, dissera: "Não é porque grita que tem razão" (V., D, relatório do professor, Fevereiro 1996) e isso fizera-o ser convidado a sair da aula. Ele saía, mas afirmava antes de sair: "Isto é usar o poder, mas não é ter razão" (V., D, relatório do professor, Fevereiro 1996). As discussões surgiam quando algum professor criticava os cadernos sujos de alunos do bairro, ou os atrasos deles de manhã, na primeira aula, ou a roupa pouco cuidada. O V. argumentava que o professor não fazia a mínima ideia do que era cumprir horários numa casa sem água canalizada e electricidade, onde todos dormiam e se arranjavam num espaço comum reduzido, ou ter cadernos limpos quando se faziam trabalhos na mesma mesa em que se cozinhava e comia, ou vestir roupa bonita quando não havia dinheiro nem para comer.

Ao contrário da maioria dos que habitavam o bairro, ele tinha um vocabulário rico e uma sintaxe cuidada, em português, além de muito poder de argumentação. Mas isso nunca foi visto, pelos professores, como um sinal das suas capacidades e competências, como algo que pudessem rentabilizar, em aula. Assim, como afirma César (2013a), os relatórios que se referiam ao V. eram impressionantes porque, em dezenas e dezenas de páginas, apenas apontavam defeitos e pontos negativos. Existia uma voz colectiva (Bakhtin, 1929/1981), que esta autora designava como "os professores". Era uma voz sem rosto, que assumia que o V. era "difícil, mal-educado, desafiador, pouco empenhado, só criava sarilhos, pelo que ouvi na sala de professores" (Professor da escola, CI, registada pela investigadora, Julho de 1997). O mais curioso é que, alguns dos que subscreviam esta voz colectiva, nunca tinham lecionado turmas frequentadas pelo V., ou contactado com ele, directamente. Mas repetiam o que ouviam dizer e a fama dele, de aluno complicado, a evitar, ía aumentando.

Quando frequentou o 8.º ano de escolaridade pela segunda vez (1995/96), houve um roubo na sala de aula, durante o intervalo, e o V. foi acusado. Ele negou sempre, mas também se negou a identificar quem tinha sido. Nos relatórios

desse processo consta que disse: "Sei quem foi, mas não sou bufo. Não me cabe a mim acusar ninguém, nem identificar quem tem o relógio. Mas não sou eu. Quando faço algo errado, eu assumo." (V., D, relatório de suspensão, 1996). Ficou decidido que seria suspenso três dias e isso, com as faltas que já tinha por ter sido convidado a sair de algumas aulas e ter chegado atrasado a outras, fez com que ficasse retido por faltas, apesar de ter classificações que lhe teriam permitido transitar de ano. Nos outros anos lectivos, ele controlava as faltas. Só não o fez, na primeira vez em que ficou retido no 8.º ano de escolaridade, em que contabilizou mal as faltas a uma das disciplinas. Mas, habitualmente, se já estava perto do número de faltas permitido, deixava de argumentar e não era novamente convidado a sair. Isso revelava mais mecanismos de controlo do que aqueles que lhe reconheciam. Mas um roubo que ele não fez, já não era algo que conseguisse prever ou controlar.

O que é mais grave, neste episódio, é que algumas semanas depois do V. ter sido suspenso e não ter transitado de ano por esse motivo, se descobriu quem tinha roubado o relógio, pois este caíu da mochila de um aluno, que vivia no bairro novo. Mas, desse, nunca ninguém desconfiou. Quanto ao V., já tinha ficado retido e nenhum responsável da escola ou professor comunicou com ele, nessa altura ou depois, quando se veio inscrever para voltar a frequentar o 8.º ano de escolaridade. Portanto, quando voltou para a escola, vinha mais agressivo, mais revoltado e mais convencido de que só o tinham tratado assim por ser negro e do bairro. Quem tinha roubado o relógio, era loiro, de olhos azuis e tinha uma família abastada. Não tinha precedentes disciplinares e, por isso, teve uma reprimenda, por escrito, devolveu o relógio e pediu desculpa ao colega, mas não foi suspenso. Numa entrevista, o V. comentou a propósito da discrepância entre os dois castigos:

> Quem roubou aquele relógio, passou de ano e só teve uma reprimenda, porque era branco e rico e desses ninguém desconfia, são sempre os pobres e negros que são os ladrões... Eu, que não fiz nada, fui suspenso e reprovei... e nem sequer me pediram desculpa por terem acusado alguém inocente, por me terem obrigado a repetir um ano injustamente. Mas eu sou negro e do bairro. Em mim, ninguém acreditou. Sou só mais um que reprova e confirma o que se espera de

> nós: insucessos, roubos, brigas, sermos presos, morrermos cedo. É por isso que eu sempre achei que chuis [polícias] e professores, é tudo igual. Quando há problemas, somos sempre nós os culpados. Seja na escola, numa loja ou na rua. (V., E1, Dezembro 1997)

Este excerto faz-nos lembrar o que relata Alves (2023), quando refere a discriminação negativa de que são alvo as pessoas de etnia cigana e os negros, por parte das forças policiais, em Portugal. Segundo esta autora, estas pessoas têm uma maior probabilidade de serem mortas pelas forças policiais, sendo mais frequentemente presas preventivamente ou acusadas. Algo semelhante aconteceu com o V., neste episódio, em que ele se viu forçado a repetir o 8.º ano de escolaridade, mais uma vez, por ser acusado de um roubo que não tinha cometido. Ao vivenciarem muitas situações de discriminação negativa, de falta de justiça social e de equidade, muitos destes alunos deixavam de acreditar que a Escola fosse um caminho possível para eles, e aquela escola um lugar onde fossem acolhidos. Por isso, muito deles optavam por trajectórias de participação ao longo da vida com percursos escolares curtos, em que deixavam a Escola assim que concluíam o 9.º ano de escolaridade, ou mesmo antes disso, se já tivessem idade para trabalhar. Este relato ilumina, ainda, como as vozes colectivas associadas ao poder e à autoridade, podem destruir o acesso ao sucesso escolar e a uma vida profissional melhor, com salários mais elevados e onde a pessoa se sinta mais realizada.

Quando fizemos a meta-análise dos dados do V. e da M., apercebemo-nos de como foi importante, para ele, a existência de duas outras vozes colectivas, que César (2013a) já focara brevemente: os colegas do bairro; e os elementos da equipa do projecto IC. Ao contrário da voz colectiva que designámos por "professores", que só identificava características negativas no V., entre os colegas do bairro ele era popular e admirado, tal como pelas pessoas que faziam parte da equipa do projecto IC. Ser apreciado por um professor/investigador, uma investigadora, observadores externos e internos, foi uma novidade para ele. Nunca pensou que isso pudesse acontecer, muito menos em aulas de Matemática. Isso fê-lo descobrir capacidades e competências, que não pensava ser capaz de mobilizar, e a conseguir desempenhos matemáticos, que também nunca tinha julgado

serem possíveis. Como nos disse na entrevista do final do *follow-up*, "participar neste projecto mudou completamente a minha vida" (V., E13, Julho 2009).

O V. costumava transitar de ano com nível negativo a Matemática e a Físico-Química. Em Portugal, até ao final do 3.º ciclo do ensino básico (9.º ano de escolaridade), os alunos podem transitar de ano com nível negativo a duas disciplinas. Como ele se achava péssimo aluno a estas disciplinas, sem capacidade para as aprender, nem sequer comprava os manuais, ou trazia material. Sentava-se sossegado, ia desenhando (desenhava muito bem) e, nos testes, escrevia o nome e pouco mais. Por isso, tinha Nível 1, o que indicava não só que não mobilizava os conhecimentos, mas também falta de empenho e de vontade de aprender, que se negava a resolver as tarefas e a participar nas aulas. A situação tendia a agravar-se e, por isso, a coordenadora do projecto IC falou com a Direção da escola e ficou combinado que aquela turma iria participar no IC, no 9.º ano de escolaridade. Os professores preferiam evitar aquela turma. Por isso, que alguém se voluntariasse para o fazer foi rapidamente aceite, mas causou estranheza. Para a equipa do IC, esta turma fazer parte do mesmo era uma hipótese de muitos alunos conseguirem concluir o 9.º ano de escolaridade que, naquela época, era a escolaridade mínima obrigatória e dava acesso a inscreverem-se para obter a carta de condução, ter uma empresa própria, ou frequentarem um curso profissional que lhes proporcionasse, depois, um emprego melhor. A maioria dos alunos queria começar a trabalhar quando o concluísse. Muitos já tinham mais de 16 anos, pois as idades, na turma, oscilavam entre os 14 anos, das quatro meninas, que obtinham classificações elevadas, entre elas a M., e que apresentavam a idade esperada, e os 17 anos, de outros alunos. O V. tinha 16 anos, pois reprovara duas vezes no 8.º ano de escolaridade.

O professor/investigador tinha passado os primeiros dias de Setembro a ler os relatórios que se referiam aos alunos daquela turma, sobretudo os do V., que enchiam vários *dossiers*, e a discuti-los com a coordenadora do projecto IC. O que mais o tinha impressionado é que, nesses relatórios, não havia nenhum comentário positivo sobre o V., embora ele tenha identificado diversas competências: capacidade de argumentação, vocabulário rico, sentido crítico, sentido de justiça, lealdade, ou capacidade de liderança, entre outras. Se fossem bem orientadas, poderiam ser muito úteis, em aula. Tínhamos ensaiado, discutido e

analisado, através do recurso a casos reais (escritos e em vídeo) e de *role-playing*, usados nas sessões de preparação do estágio, como era habitual na equipa do IC, diversas formas de actuação em situações disruptivas. Por isso, o professor/investigador sentia-se confiante e era alguém calmo e ponderado, simpático, mas cuja postura impunha naturalmente respeito. Também tinha selecionado ou adaptado um conjunto de tarefas, das quais iria escolher as que, posteriormente, em função dos resultados do IACC, iria propor, em aula. Sabia que as equações, o primeiro conteúdo daquele ano de escolaridade, não eram particularmente apreciadas pelos alunos e queria que eles não desanimassem, quando começassem a abordar os primeiros conteúdos programáticos do 9.º ano de escolaridade.

A primeira semana de aulas: Conhecer melhor o V. e a M.

Quando o professor/investigador entrou na sala de aula, pela primeira vez, os alunos estavam sentados nas posições que tinham escolhido, como era habitual na 1.ª semana de aulas do IC. O professor/investigador levava consigo uma planta da sala de aula, em branco, para ir preenchendo, enquanto os alunos respondiam à TIP1, ao Q1 e ao IACC, os instrumentos utilizados na 1.ª aula e 2.ª aula (aulas de 50 minutos, cada uma delas). Assim, identificava onde eles se tinham sentado, se escreviam com a mão esquerda, se tinham óculos, muito ou pouco graduados, ou qualquer outro detalhe que pudesse ser relevante para a formação das díades. Aquilo que viu, espacialmente, retratava a falta de comunicação entre as três comunidades culturais que compunham aquela escola e turma: (1) na fila da frente, o mais perto possível da secretária do professor, sentavam-se as quatro meninas que obtinham classificações elevadas e moravam no bairro novo, apresentando, em cima das mesas, todo o material, a condizer do ponto de vista estético; (2) por trás delas, havia uma fila de mesas sem ninguém; (3) atrás, à esquerda, sentava-se a comunidade portuguesa que morava no bairro, ou seja, seis alunos/as; e (4) atrás, à direita, mais perto da janela, para ver o que se passava no recreio, bem como da porta, para serem os primeiros a sair, estava a comunidade cabo-verdiana, que habitava no bairro. Era a mais representada naquela turma (N=18). Seria preciso ser muito distraído para não nos apercebermos da mensagem implícita,

que esta distribuição espacial transmitia, e de como era urgente promover o diálogo intercultural.

A primeira afirmação do professor/investigador que causou espanto, foi ter revelado que estava muito contente por ir trabalhar com aquela turma. Habituados a ser rejeitados e criticados, acharam que ele não devia saber o que era a turma, pelo que alguns comentaram, baixinho: "Coitado, não sabe no que se está a meter!" (vários alunos, O, registada no DB do professor/investigador, Setembro 1997). Mas, depois, perceberam que íam fazer parte de um projecto de investigação e que, durante a primeira semana, não iriam abordar novos conteúdos, o que lhes agradou. Era uma semana "na boa, cool", como vários referiram, em aula. Na primeira tarefa, que se pretendia que contribuísse logo para fazer uma ruptura com o contrato didáctico dito tradicional (César, 2003, 2009, 2013a), os alunos receberam uma folha A4, em branco, e foram confrontados com a TIP1, cujas instruções foram escritas no quadro: "Desenha ou escreve o que é para ti a Matemática". Começar pela palavra desenha é uma maneira de dizer, implicitamente, aos que não costumam resolver as tarefas, nas aulas de Matemática, que ali todos conseguem participar. Os alunos olharam uns para os outros, admirados, e mostraram o seu espanto de diversas formas: perguntaram se podiam mesmo desenhar; se era possível desenhar e escrever, ou usar lápis de cor; e se podiam desenhar o que quisessem. Percebia-se que aquela era uma tarefa fora do estilo a que estavam habituados e eles hesitavam na interpretação do que poderiam fazer. Para além disso, nunca ninguém lhes tinha perguntado o que era, para eles, a Matemática, ou qualquer outra opinião sobre o que era uma determinada disciplina, ou a escola. Eles não estavam habituados a serem escutados, mas a obedecer e a fazer o que os professores mandavam ou, quando não o faziam, a ter participações disciplinares ou outras sanções. Por isso se mostravam tão confusos, como se desconfiassem de que a opinião deles interessasse, ou temessem que, depois, fossem castigados por estarem a desenhar numa aula de Matemática.

Mas, passado pouco tempo, estavam todos a trabalhar, até o V. ter perguntado, com um ar desafiador: "Posso mesmo desenhar o que eu quiser?" (V., O, registada no DB do professor/investigador, Setembro 1997). Como o professor lhe respondeu afirmativamente, com um sorriso, ele acrescentou: "Mesmo que eu ache que a Matemática cheira a peixe podre?" (V., O, registada no DB do

professor/investigador, Setembro 1997). Naquele momento, a turma estava em suspenso e todos olhavam ora para o V., ora para o professor/investigador, expectantes em relação ao que ia acontecer a seguir. Mas o professor/investigador respondeu, num tom calmo e simpático: "Isso é um cheiro... se fores capaz de desenhar um cheiro... não vejo nenhum problema" (Professor/investigador, O, registada no DB, Setembro 1997). O V., que percebeu que o professor/investigador não se irritava, nem perdia a compostura, recomeçou a desenhar e os restantes alunos voltaram a trabalhar. O que ignorávamos, nessa altura, é que os alunos da escola tinham feito apostas, em que o V. ganharia dinheiro, se fosse convidado a sair da sala de aula nos primeiros minutos, como relatou César (2013b). Um estagiário parecia alguém fácil de fazer perder o controlo. Mas enganaram-se: uma das regras do projecto IC é que os problemas disciplinares se resolvem dentro da sala de aula, pelo que não convidamos alunos a sair. Se eles precisam de aprender, Matemática, regras de socialização, ou outras, é na sala de aula e com o professor/investigador que têm oportunidade de as interiorizar. O que fazemos é discutir, em equipa, hipóteses de actuação mais ajustadas, formas de conseguir ultrapassar obstáculos e, algo que se tornou evidente, ao longo dos anos, é que não perder a calma e falar baixo, é essencial. Para além disso, a formação inicial, para trabalhar no projecto, bem como a formação contínua, inclui muito *role-playing*, o que ajuda bastante a saber actuar neste tipo de situações mais desafiadoras.

McLay e Renshaw (2024) realçam a importância da formação inicial, nomeadamente no que se refere à maturidade emocional, capacidade para estabelecer relações com os alunos, bem como em desenvolver o que César (2008) designa por uma "consciência epistemológica" e que estes autores consideram "convicções pedagógicas bem desenvolvidas sobre o que é educacionalmente benéfico para os seus alunos" (McLay & Renshaw, 2024, p. 352). César e seus colaboradores (2014) tinham também referido como era fundamental que a formação de professores, inicial e contínua, permitisse desenvolver a "qualidade relacional". Como afirmam McLay e Renshaw (2024), "argumentamos que a "bondade" (*goodness*) da formação de professores reside em encorajar os professores, na formação inicial, a tornarem-se profissionais que estabelecem relações afetuosas com os alunos e podem implementar entendimentos e convicções

pedagógicas bem desenvolvidas sobre o que é educacionalmente benéfico para os seus alunos." (p. 352). Assim, para César e seus colaboradores (2014), bem como para McLay e Renshaw (2024), a formação inicial será tanto mais ajustada quanto conseguir preparar os professores para identificarem o que é benéfico, como devem agir, em aula, para o atingir e como se estabelecem relações de respeito mútuo, mas que sejam agradáveis e façam os alunos sentirem-se acolhidos.

A análise da TIP1 permitiu compreender que o V. desenhava muitíssimo bem, que era algo que gostava de fazer, tendo uma expressão plástica muito desenvolvida. Mas também revelava que ele tinha uma representação social muito negativa da Matemática (escolar), que considerava muito difícil, embora fosse uma representação inovadora, que revelava muita criatividade. Desenhou um aluno, parecido com ele, em três momentos: (1) com um ar desesperado, face a uma folha de exercícios de Matemática; (2) no quadro, com uma resolução apenas começada e um professor que grita: "És nulo, não fazes nada certo!"; e (3) esse aluno a abandonar a sala. O desenho do V. ilustrava muito bem a representação social negativa que tinha dele próprio, enquanto aluno de Matemática, bem como as expectativas negativas dos professores, em relação aos seus desempenhos matemáticos. Não sabemos se a saída da aula era porque tinha sido convidado a sair, ou porque decidira ir-se embora. Mas, fosse qual fosse a interpretação, ilustrava uma valência emocional negativa, desagradável, associada a sofrimento. A M. preferiu escrever uma pequena composição matemática, que revela uma representação social positiva dela, enquanto aluna de Matemática, bem como desta disciplina, que considera importante para o futuro. No entanto, esta representação social é bastante tradicional, associando a Matemática a "fazer contas".

> A Matemática é muito importante para sabermos pensar, desenvolvermos o raciocínio e a capacidade de cálculo. A Matemática serve para sabermos fazer contas.
> Esta disciplina é tão importante, que decide a entrada em muitos cursos, como em Medicina, que é o que eu quero tirar. Eu aprendo com facilidade e gosto muito de Matemática. Mas, no secundário, vou ter de estudar mais, porque a

> média de Medicina é muito alta e a classificação de Matemática vai ser mais importante. (M., TIP1, Setembro 1997)

Quando o professor/investigador lhes distribuiu a tarefa seguinte, um questionário (Q1), não se negaram a responder e, passado pouco tempo, todos estavam a trabalhar e em silêncio. O professor/investigador anotou: "Parecia uma turma muito calma, colaborante, que gostava de trabalhar" (Professor/investigador, O, registada no DB, Setembro 1997). À semelhança do que tinha acontecido com a TIP1, os alunos demoraram entre 5 e 15 minutos a responderem ao Q1. É importante realçar que, os que acabavam mais depressa, voltavam a ler algumas perguntas, ou na TIP1 reliam o que tinham escrito, ou viam e completavam o que tinham desenhado. Mas mantinham-se calados e sossegados, sem perturbarem o trabalho dos colegas. Um episódio cómico ilustra o silêncio que reinava na aula: naquela altura, havia uma funcionária da escola que levava o livro de ponto para o professor escrever o sumário e assinalar quem faltava. Quando ela se aproximou da porta da sala de aula, não ouviu nenhum barulho e seguiu em frente, marcando falta ao professor/investigador. Segundo explicou, quando este foi falar com ela, para assinar o livro de ponto, "como não ouvi barulho e esta turma é muito agitada, achei que tinha faltado e eles não estavam na aula. Desculpe, mas nunca os vi sossegados, achei que isso nem era possível" (Funcionária, CI, registada no DB do professor/investigador, Setembro 1997). Como se nota, esta funcionária tinha sido influenciada pela voz colectiva que designámos por "professores", que descreviam a turma como agitada, mal comportada, pouco motivada, desafiadora, susceptível de criar problemas disciplinares. Se estavam todos em silêncio, empenhados, a trabalhar, não eram reconhecidos e, por isso, ela pensara que não estavam na sala de aula. Isto ilustra como as expectativas e representações sociais referentes a esta turma eram negativas e penalizantes, para os alunos.

A análise do Q1 permitiu saber que o V. pretendia deixar de estudar assim que terminasse o 9.º ano de escolaridade pelo que, afirmava "este ano só não me quero meter em porcarias que me façam reprovar, preciso de ir trabalhar" (V., Q1, Setembro 1997). Também percebemos que a mãe não tinha frequentado a escola e o pai tinha a 4.ª classe (equivalente ao actual 1.º ciclo do ensino básico), tendo profissões precárias, mal remuneradas e pouco valorizadas socialmente.

Para além disso, as disciplinas de que o V. menos gostava eram Matemática (sublinhado) e Físico-Química. As que preferia eram Educação Visual e Educação Física, nas quais tinha obtido Nível 5 (o mais elevado), nos anos lectivos anteriores. Também gostava bastante de Português e Inglês (Nível 4) e de Geografia. Ele tinha uma representação social muito negativa de si, enquanto aluno de Matemática, e achava que "sou nulo, não consigo aprender nada" (V., Q1, Setembro 1997). Mas reconhecia que, "na vida real, usa-se Matemática e eu sou capaz de fazer contas, comprar coisas, usar dinheiro, mas a [Matemática] da escola não serve para nada" (V., Q1, Setembro 1997). A M. pretendia tirar o curso de Medicina e, por isso, empenhava-se em ter classificações elevadas. Sabia que, a partir do ensino secundário (10.º ao 12.º ano de escolaridade), eram estas que lhe poderiam dar acesso ao curso que desejava. Os pais eram ambos licenciados e exerciam profissões com prestígio social, bem remuneradas, vivendo numa casa típica da classe média alta. Ela tinha várias disciplinas onde obtinha Nível 5 (o mais elevado) e noutras Nível 4, como Educação Física e Português. Só tinha Nível 3 a Educação Visual, algo que não a preocupava, pois deixaria de ter essa disciplina no 10.º ano de escolaridade, ou seja, no ano lectivo seguinte. Os pais, que eram exigentes em relação aos desempenhos académicos dela, "não se importavam com o 3 a EV" (M., E1, Dezembro 1997). As disciplinas de que gostava mais eram Matemática e Ciências Naturais e a que gostava menos era Educação Visual, não sendo capaz de indicar nenhuma outra. Tinha uma representação social elevada de si, enquanto aluna, e da Matemática, que "era importante em muitos cursos e na vida profissional" (M., Q1, Setembro 1997). Por isso, a análise do Q1 revelou diversas diferenças, mas também permitiu confirmar que ambos tinham um vocabulário rico, poder de argumentação e isso poderia ser útil quando trabalhassem em díade.

Como aquela turma não tinha muitos alunos com classificações elevadas, ou com nível positivo a Matemática, era urgente conseguir que mais alunos atingissem o Nível 3. A análise do IACC mostrou que o V. tinha capacidades e competências muito desenvolvidas, situando-se no Quadrante 4 (Figuras 2 e 64). Os alunos que se situam neste quadrante, sobretudo se mobilizam muitas capacidades e competências úteis nas aulas de Matemática, como acontecia com o V., que conseguira ser bem-sucedido em todas as tarefas do IACC, são os que mais

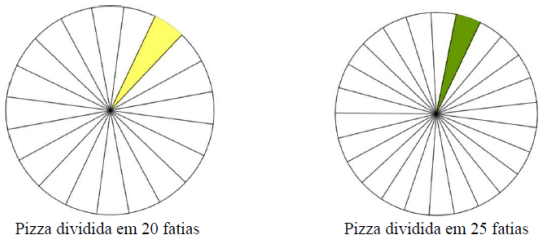
rapidamente progridem nos desempenhos matemáticos. Ao terem capacidades e competências muito desenvolvidas, desde que se sintam respeitados e motivados, conseguem facilmente apropriar os conteúdos. Por sua vez, a M. situava-se no Quadrante 1, mas tinha várias capacidades e competências que precisava de desenvolver, como a intuição matemática, o sentido crítico ou o raciocínio espacial e geométrico. Provavelmente tinha apropriado bastantes conhecimentos matemáticos, uma vez que obtivera Nível 5 a Matemática, em anos lectivos anteriores. Porém, podia ser beneficiada se interagisse com o V., tal como ele poderia progredir, interagindo com ela.

Na Tarefa A (Figura 3), que pretendia avaliar o sentido crítico em relação a informação matemática inserida numa notícia de jornal, o V. recorre à metáfora da *pizza* para mostrar que se come mais se a *pizza* estiver dividida em 20 fatias do que se estiver dividida em 25 fatias (Figura 66). O desenho, feito à mão livre, ou seja, sem instrumentos auxiliares, é extremamente rigoroso. Olhando, vê-se claramente a diferença do tamanho das fatias. Como o V. não tinha lápis de cor, nem outros materiais, foi o professor/investigador que lhe emprestou um lápis e uma caneta. Por isso, pintou as fatias com as duas cores que tinha: lápis de carvão, pouco carregado, para dar um cinzento, bastante claro; e azul, da caneta com que estava a escrever. Quando reproduzimos a figura dele, em computador, optámos por outras cores, para se distinguirem mais facilmente. Como ele não costumava escrever nada nos testes de Matemática, nem resolver as tarefas, em aula, não estava habituado a escrever a resposta, no final. Assim, esta resolução revela sentido crítico, criatividade, mas não está tão completa como a que é apresentada na Figura 11, na qual a passagem da metáfora da *pizza* para a notícia é nítida, através do recurso a uma pequena composição matemática, existindo, ainda, uma resposta, no final. Porém, mostra uma enorme mudança de atitude por parte do V.: está a resolver tarefas matemáticas, em aula, de forma empenhada e muito concentrado no que está a fazer, em silêncio. Isso revelava que era possível ele participar nas aulas, se a natureza das tarefas o motivasse a tentar resolvê-las e se lhe permitissem usar as suas formas naturais de abordagem dos problemas, raciocínios espaciais ou geométricos e estratégias de resolução baseadas em representações gráficas. A relevância da natureza das tarefas para os desempenhos dos alunos já tinha sido salientada há muitos anos por Abrantes (1994), que

considerava que usar tarefas de diferentes naturezas facilitava as aprendizagens matemáticas e o acesso ao sucesso académico dos alunos. Porém, a importância de deixar os alunos usarem as formas naturais de fazer e aprender Matemática, bem como que estas eram configuradas pela L1, só foram reconhecidas, brevemente, por César (2014) e analisadas em detalhe na meta-análise do projecto IC (César, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b).

Figura 66

Tarefa A – Resolução do V. – L1: crioulo



"Como mais se a pizza estiver dividida em 20 fatias"

É curioso notar que, na primeira entrevista (E1), nos explicou o impacto que a 3.ª aula tinha tido para ele. Primeiro, por ter percebido que o professor/investigador aceitava e apreciava que ele "visse a Matemática" (V., E1, Dezembro 1997). Depois, por ter verificado, com espanto, ao longo da discussão geral, que tinha acertado todas as resoluções das tarefas do IACC. Na entrevista, revelou-nos algo que ilustra melhor as suas capacidades e competências, bem como as mudanças de atitude, em aula: "Não é que tivesse comido *pizzas*, alguma vez na vida. Éramos demasiado pobres para ir ao restaurante. Mas eu não sabia Matemática... tive de fazer assim, para responder... e já queria responder... isso é estranho, mas é verdade..." (V., E1, Dezembro 1997). Esta revelação é particularmente interessante, pois a maioria dos alunos que usaram a metáfora das *pizzas*, ou a dos chocolates, não tinham dinheiro para os comer. Porém, como preferiam raciocínios geométricos e estratégias de resolução por representação gráfica, lembraram-se destas metáforas. Sabiam que existiam *pizzas* e chocolates, conseguindo desenhá-los e servir-se deles para a representação gráfica que precisavam de fazer, mesmo sem estas comidas fazerem parte do seu quotidiano. Isso revela

criatividade, bem como capacidade de observação e análise. Também ilustra a facilidade que tinham em fazer conexões entre a vida real e a Matemática escolar, algo que os currículos e documentos de política educativa salientavam ser importante promover (Abrantes et al., 1999).

A M. não revelou sentido crítico e repetiu, parcialmente, o que estava escrito na notícia, sem se aperceber de que os dados matemáticos continham diversas imprecisões. A resposta está incompleta, pois escreveu: "Houve uma diminuição dos assaltos de 1 casa em 25 para 1 casa em 20", o que significa que ela não se referiu a todos os dados matemáticos contidos na notícia e, em relação aos que considerou, não se apercebeu de que os assaltos tinham aumentado, em vez de terem diminuído. Assim, precisava de desenvolver o sentido crítico e a capacidade de análise de dados matemáticos contidos em notícias.

Na Tarefa B (Figura 18), o V. prefere uma estratégia por representação gráfica, como a maioria dos alunos cuja L1 é o crioulo, desenhando as canecas e os movimentos necessários para despejar duas vezes a caneca de 3 l para a de 5 l, ficando com 1 l na caneca de 3 l. A sua representação gráfica é semelhante à da Figura 26, mas com muito melhor traço e mais rigor. Vê-se que é alguém com um raciocínio espacial bem desenvolvido, bem como proficiente em artes plásticas. Esta resolução revela intuição matemática. A M. tem uma resolução semelhante à da Figura 25, recorrendo a uma composição matemática, como estratégia de resolução, como é habitual nos alunos que revelam persistência na tarefa, mas não mobilizam a intuição matemática. A persistência na tarefa e as composições matemáticas eram mais frequentes entre os alunos cuja L1 era o português.

Na Tarefa C (Figura 30), o V. e a M. revelaram ter ambos acesso ao raciocínio abstracto (RA), produzindo uma resolução semelhante à da Figura 36. Há a realçar que a M. desenha com régua, para as linhas ficarem bem desenhadas, enquanto o V. fez os desenhos sem o auxílio de qualquer instrumento, mas de forma muito rigorosa. Mais uma vez, revelou um apurado raciocínio geométrico e capacidade de representação gráfica: os ângulos estão perfeitos, a distância das três pintas também, a diagonal está muito bem traçada. Ele visualiza muito bem e consegue transpor isso para as figuras que traça, executando-as rapidamente, sem hesitações, nem dificuldade.

Na Tarefa D (Figura 37), o V. preferiu uma abordagem global, um raciocínio geométrico e uma estratégia de resolução por representação gráfica. Elabora a resolução ilustrada na Figura 43, ou seja, faz a decomposição da figura mais complexa e usa operações elementares matemáticas que envolvem dízimas finitas. Apesar de afirmar que é "nulo a Matemática", como ouvimos em diversas conversas informais e na primeira entrevista, sabe que metade de 15 são 7.5 e que o produto de 7.5 por 10 dá 75. Portanto, o que tinha era uma auto-estima académica muito negativa, enquanto aluno de Matemática, que o fazia nem sequer chegar a tentar, para não ser confrontado com um novo fracasso. Mas, perante tarefas fora do habitual e um professor/investigador que aceitava qualquer tipo de raciocínio e de estratégia de resolução, mostrou ter muito mais recursos internos e conhecimentos matemáticos, do que aqueles que julgava ter disponíveis e ser capaz de mobilizar. Isto ilumina como os modeladores pessoais de desempenho (MPD), a natureza das tarefas propostas e o contrato didáctico utilizado influenciam os desempenhos matemáticos dos alunos, como realçaram César (2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b), César e seus colaboradores (2014), César e Machado (2024a, 2024b, 2025), Machado (2014) e Ventura (2012).

A M., como a maioria dos alunos cuja L1 é o português, preferiu um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética, tendo uma resolução semelhante à da Figura 44, ou seja, calcula a área do rectângulo e, depois, como reconhece que a parte pintada é metade da área do retângulo, divide-a por dois, obtendo o resultado de 75 cm^2. A resolução da M. está mais relacionada com conhecimentos matemáticos apropriados nas aulas do que a do V. e é também menos criativa. Mas, como ambos mobilizam capacidades e competências diferentes, ambos podem desenvolver outras, se trabalharem em díade e na sua ZDP (César, 2009; Vygotsky, 1934/1962), desde que a natureza das tarefas fomente a alternância do par mais competente ao longo da resolução das mesmas (César, 2009, 2013a, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b).

A Tarefa E (Figura 49) pretendia identificar o tipo de abordagem do problema que os alunos preferiam, bem como se conseguiam fazer conexões entre situações reais (compra e venda) e a Matemática escolar. O V., tal como a maioria dos alunos cuja L1 é o crioulo, preferiu uma abordagem global do problema, semelhante à apresentada na Figura 60, embora na época do V. o enunciado

utilizasse contos, visto que a moeda, em Portugal, era o escudo. Mais uma vez, revela que consegue mobilizar o raciocínio abstracto (RA), recorrendo a uma estratégia de resolução aritmética, na qual adiciona o dinheiro gasto nas duas compras, o que foi ganho nas duas vendas e, depois, realiza a diferença entre esses dois valores, para quantificar o lucro obtido. A M., tal como a maioria dos alunos cuja L1 é o português, preferiu uma abordagem passo-a-passo, seguindo a ordem das transações indicada no enunciado. Precisa de recorrer ao raciocínio concreto (RC), imaginando que o negociante tinha uma determinada quantia à partida, tal como no exemplo da Figura 52. Elabora uma resolução detalhada e completa, com uma resposta final, em que afirma que houve 200 contos de lucro. Tendo conseguido mobilizar o RA na Tarefa C, mas não na Tarefa E, isso indica que deverá estar na fase de transição entre estes dois tipos de raciocínio lógico (Machado, 2014).

Sintetizando o que se observou através da análise do IACC, o V. e a M. mobilizavam capacidades e competências complementares. O V. mostrou ter sentido crítico, intuição matemática, criatividade, um raciocínio espacial e um raciocínio geométrico muito desenvolvidos, mobilizando o raciocínio abstracto (RA) na resolução das diversas tarefas. Prefere uma abordagem global dos problemas, um raciocínio espacial ou geométrico e uma estratégia de resolução por representação gráfica. Como tem vivenciado insucesso académico em Matemática, não mobiliza alguns dos conteúdos abordados nos anos de escolaridade anteriores, mas mobiliza mais do que os descritos nos seus relatórios. A M. não revelou sentido crítico, nem intuição matemática ou criatividade, mas tem persistência na tarefa e, como obteve Nível 5 a Matemática, é de supor que conseguirá mobilizar conhecimentos de anos de escolaridade anteriores. Nem sempre tem acesso ao raciocínio abstracto (RA), oscilando entre este e o raciocínio concreto (RC), pelo que será beneficiada se trabalhar com o V., na sua ZDP (César, 2009; Vygotsky, 1934/1962). Prefere uma abordagem passo-a-passo, um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética. Assim, há muitas capacidades e competências que ambos podem vir a desenvolver, se trabalharem na mesma díade, visto que mobilizam capacidades e competências complementares. Para a M., que pretende tirar o curso de Medicina, as classificações do 10.º ano de escolaridade são cruciais. Como todo o 1.º período é dedicado à Geometria,

desenvolver o raciocínio geométrico é importante para ela, não tanto em relação à classificação no 9.º ano de escolaridade, mas no que se refere ao ensino secundário. O V. pode conseguir desenvolver o raciocínio analítico, aprender outras estratégias de resolução e muitos conteúdos matemáticos.

Para que isto fosse possível, a natureza das tarefas a propor, nas primeiras aulas, era muito importante, pois tinha de permitir que ambos usassem a abordagem, o raciocínio e as estratégias de resolução preferenciais, para que o outro as pudesse aprender. Também era essencial que aprendessem a confiar um no outro, pois o professor/investigador estava convencido de que ambos podiam progredir muito por trabalharem em conjunto, mas isso só seria possível se transformassem a desconfiança e falta de apreço em confiança e admiração. O tempo, veio a dar-lhe razão. Mas, quando souberam que íam trabalhar juntos, a reacção não foi a melhor. Aceitaram, porque tinham ficado impressionados com a 3.ª aula (discussão geral do IACC) e a ida de todos os alunos ao quadro, explicar algo em que tinham sido bem-sucedidos. Mas, as caras que fizeram, mostravam bem o desagrado. No entanto, o V., pela primeira vez, estava a ser apreciado numa aula de Matemática e a gostar de resolver as tarefas. Ele achava que isso ía mudar, para pior, assim que "começasse a Matemática a sério" (V., E1, Dezembro 1997). Mas, até lá, queria aproveitar aquele período de bonança. A M. pretendia manter o Nível 5 a Matemática e gostava de agradar aos professores. Portanto, também não se ia negar abertamente a trabalhar com o V., mesmo que nos tivesse afirmado, depois, que "o V. seria o último que eu escolheria para trabalhar comigo" (M., E1, Dezembro 1997). Assim, mudaram para a mesa que lhes foi indicada, mas sentaram-se tão longe um do outro quanto era possível, para ainda partilharem a mesma mesa e ficaram calados, sem olharem sequer um para o outro, enquanto as outras díades íam para os seus lugares.

Trabalho em díade ao longo do ano lectivo

Tal como esperávamos, as díades que tínhamos formado não eram as que os alunos teriam escolhido, se fossem eles a decidir com quem trabalhavam. Pretendíamos que as díades fossem diferenciadas quanto ao género, cultura em que participavam e que tivessem capacidades e competências complementares.

Numa turma em que a maioria dos alunos tinha nível negativo a Matemática, precisávamos de fazer progredir rapidamente aqueles que tinham revelado capacidades e competências bastante desenvolvidas, como o V. e alguns outros, que tinham obtido nível negativo a Matemática. Se progredissem nos desempenhos, poderiam, depois, mudar de díade e ajudar outros colegas a também atingirem melhores classificações. Por isso, cada uma das alunas que tinham obtido Nível 4 ou Nível 5, a Matemática, ficou com um colega que tinha mostrado mobilizar capacidades e competências complementares às delas, ou seja, raciocínios espaciais ou geométricos e estratégias de resolução por representação gráfica, sentido crítico e intuição matemática, entre outras. Assim, eles beneficiavam dos conhecimentos de conteúdos matemáticos e aprendiam raciocínios analíticos e estratégias de resolução aritméticas e algébricas, enquanto elas desenvolviam sentido crítico, intuição matemática, criatividade e raciocínios espaciais e geométricos, associados a representações gráficas. Foi nesta lógica que decidimos juntar o V. com a M. Olhando para as Figuras 2 e 64, ela está no ponto extremo superior das classificações e ele no das capacidades e competências. Portanto, ambos tinham a ganhar por trabalharem um com o outro, apesar de, à partida, ambos estarem convencidos de que apenas o V. podia aprender algo com a M., por ter obtido Nível 1 a Matemática. Os alunos, tal como os professores, tendiam a considerar apenas as classificações e a ignorar as capacidades e competências (César, 2024b), ou seja, a não considerar os modeladores pessoais de desempenho (MPD), na sua riqueza e complexidade.

Numa turma de 28 alunos, em que a maioria considerava a Matemática muito difícil e obtivera uma classificação negativa a esta disciplina, era preciso dar particular atenção à natureza das tarefas propostas, em aula, sobretudo quando se começasse a leccionar o primeiro conteúdo: equações do 1.º grau a uma incógnita. Este era um conteúdo com que os alunos já tinham contactado nos anos de escolaridade anteriores e que, para muitos deles, não deixara recordações agradáveis. Mas, no IACC, em que as tarefas eram pouco habituais, todos os alunos tinham estado a trabalhar, tentando resolvê-las. Por isso, uma tarefa pouco habitual parecia adequada, pois era mais provável que evitasse uma rejeição imediata e que fomentasse a interacção entre pares, quando estivessem a trabalhar em díade, bem como uma discussão geral mais rica, quando

confrontassem as diversas estratégias de resolução que tinham sido utilizadas em cada problema.

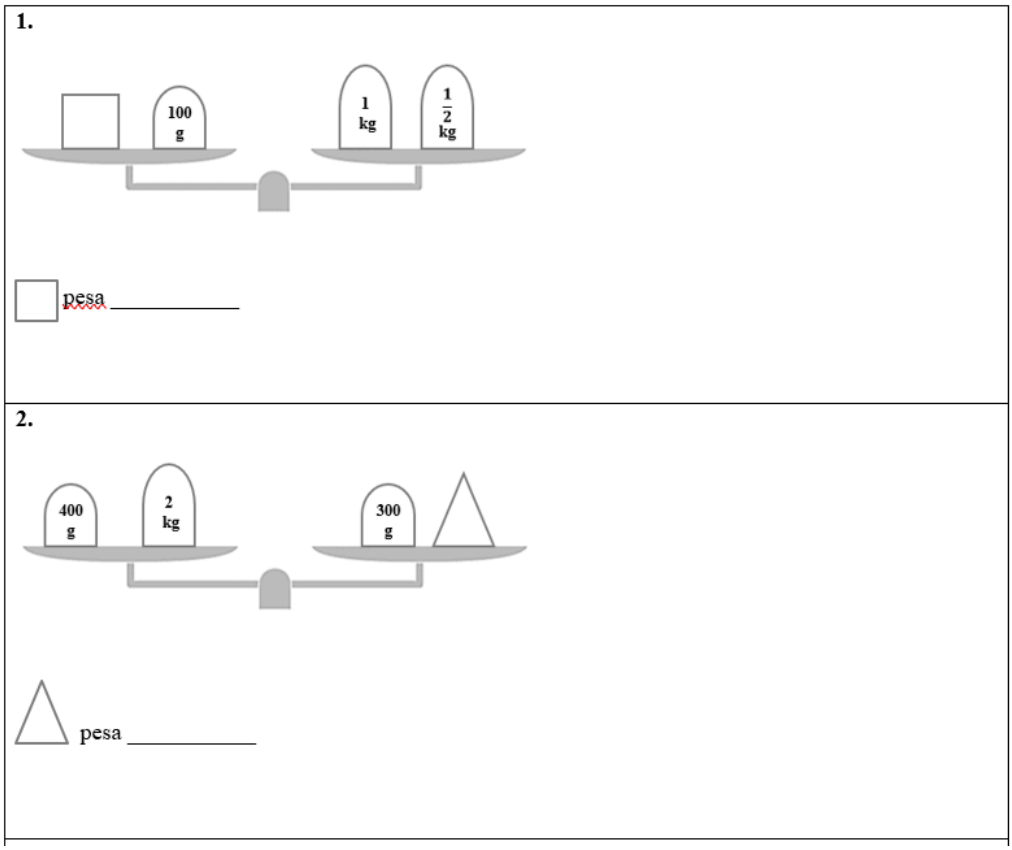
Naquela época, os manuais escolares não usavam a metáfora da balança para introduzirem as equações do 1.º grau a uma incógnita. Só posteriormente o passaram a fazer. Mas César (1994) tinha recorrido a essa metáfora nas sessões com tarefas não-habituais, entre o pré-teste e o pós-teste. Tinha observado que, mesmo os alunos que habitualmente obtinham uma classificação negativa nesse conteúdo, detestavam equações e rejeitavam a Matemática, ao trabalharem em díade e com tarefas de uma natureza mais aberta e inovadora, conseguiam atingir desempenhos mais elevados, melhorando também os desempenhos no pós-teste, quando voltavam a resolver individualmente exercícios com equações (César, 1994; César et al., 2000). Assim, o professor/investigador optou por começar com uma ficha de trabalho que recorria a balanças, relacionando-as com as equações do 1.º grau a uma incógnita (Anexo 1), elaborada e discutida por César (1994). Por esta ter as figuras desenhadas, favorecia raciocínios e estratégias de resolução diversificados, evitando também a rejeição por parte dos alunos cuja L1 era o crioulo e os que tinham vivenciado insucesso académico acumulado, nesta disciplina. A associação entre esta tarefa e o que tinham feito no IACC, também deveria favorecer a participação dos alunos e os seus desempenhos.

Quando o professor/investigador lhes disse que íam começar por estudar equações do 1.º grau a uma incógnita, as caras de desânimo foram nítidas, excepto para as quatro alunas que costumavam obter Nível 4 ou Nível 5. Mas acrescentou que o íam fazer de uma maneira diferente da habitual: através de balanças. Perguntou se algum deles conhecia balanças de pratos. Vários alunos do bairro já as tinham visto, no mercado, onde alguns pais trabalhavam, no transporte e abastecimento. Por isso, foram alunos do bairro e que participavam na cultura cabo-verdiana que explicaram como as balanças funcionavam e isto foi outra mensagem implícita poderosa: mesmo quem tem classificação negativa a Matemática, consegue explicar detalhes importantes, para aprender conteúdos matemáticos. Quando se distribuiu a Ficha de Trabalho N.º 1 (Anexo 1), os alunos estavam mais calmos e mais dispostos a colaborar uns com os outros, incluindo a M. e o V., que continuavam sentados na mesma mesa, mas afastados um do outro. Assim que leram o enunciado dessa ficha de trabalho, a M. assumiu a

liderança e iniciou a interacção (Fala 1). Isso mostra que ela estava convencida que, se ela não liderasse, o V. não se empenhava e não resolvia as tarefas.

Figura 67

Enunciado das Tarefas 1 e 2, Ficha de Trabalho N.º 1



1. M. – Sabes como isto se faz? [Perguntou com um ar desconfiado]
2. V. – Com os desenhos é mais fácil... eu consigo ver...
3. M. – Mas sabes fazer? [Repete, com um tom já mais irritado]
4. V. – Para as balanças estarem equilibradas, têm de ter o mesmo peso de cada um dos lados, em cada prato. Ainda não fiz as contas da 1, mas a 2 dá 2 kg e 100 g. À esquerda, tem 2 kg e 400 g e à direita só tem 300 g. Por isso, faltam 2 kg e 100 g para ficar equilibrado. Queres escrever?

[O V. falou tão depressa, que a M. ficou admirada. Não esperava que ele conseguisse resolver a tarefa, muito menos que fosse tão rápido e explicasse o raciocínio tão bem]

5. M. – Mas eu acho que devíamos começar pela 1! Essa é que é a primeira...

6. V. – Eu ía resolver a 1 agora. Mas podíamos escrever já a 2, se tu estiveres de acordo com o resultado que eu calculei...

[A M. põe a mão no ar e espera pelo professor/investigador, com um ar aborrecido]

7. V. – Ele está ocupado e nós sabemos continuar. Vamos lá resolver a 1, tu escreves e, depois, escrevemos a 2. Não vale a pena chamar o professor só por isto...

8. M. – Na 1, temos 1 kg e meio da direita e 100 g da esquerda... Sabes quanto dá? [Pergunta com um ar pedagógico, como se fosse a professora dele]

9. V. – Meio quilo são 500 gramas? Era essa a minha dúvida...

10. M. – Sim, são... por isso...

11. V. – Faltam 1 kg e 400 g. Queres escrever tu, que a minha letra é feia? Podes escrever já as duas: a 1 e a 2... se concordares com as contas que eu fiz...

[A M. escreve as duas resoluções na folha de respostas]

(M. e V., O, registada em áudio, Setembro 1997)

Há vários detalhes interessantes nesta interacção, em que eles estão, pela primeira vez, a trabalhar em díade: (1) O V., cuja L1 é o crioulo, continua a afirmar que precisa de "ver" a Matemática (Fala 2), ou seja, precisa de estratégias de resolução por representação gráfica, que o ajudem a visualizar o que é pedido e a raciocinar; (2) apesar do V. não participar nas aulas de Matemática de anos lectivos anteriores, depois de ter resolvido as tarefas do IACC e ido explicar uma resolução bem-sucedida ao quadro, queria tentar resolver as tarefas (Falas 4 e 11); (3) a M. está convencida de que ele não sabe nada de Matemática e fica espantada com a velocidade dele a resolver a Tarefa 2; (4) implicitamente, percebemos que ela não gostou que ele resolvesse a tarefa tão depressa e antes dela e, por isso, desvaloriza o trabalho dele, dizendo que têm de começar pela Tarefa 1 (Fala 5); (5) como ele tenta convencê-la a escrever primeiro a resolução da Tarefa 2 (Fala 6), ela resolve recorrer à autoridade do professor/investigador, para validar a opinião dela, de que se começa pela Tarefa 1; (6) o V., que percebe

que o professor/investigador está a ajudar os que têm mais dificuldades, acha desnecessário incomodá-lo e resolve ceder: começam, então, pela Tarefa 1 (Fala 7); (7) como ela acha que é muito melhor aluna que ele e que só ele pode aprender com ela, assume um tom muito professoral e pergunta-lhe se ele sabe resolver as tarefas (Falas 1, 3 e 8); (8) apesar das respostas rápidas e completas do V., a M. continua convencida de que ele não vai conseguir resolver as tarefas, pelo que o tom de voz mostra alguma desconfiança nas capacidades e competências dele; e (9) apesar do V. ser, habitualmente, um líder, assume um estilo *low profile* e evita os conflitos e, mesmo quando ela usa um tom mais irritado, mantém-se calmo e continua a interagir com ela, colaborando na resolução.

Este tipo de actuação da M. revela a desconfiança dela em relação à utilidade de trabalhar com o V., pois achava que "não consigo aprender nada com ele e só me vou prejudicar nas notas" (M., CI, registada no DB do professor/investigador, Setembro 1997), como disse, baixinho, ao professor/investigador, antes de se sentar na mesa com ele. Mas como o professor/investigador sorriu e lhe respondeu: "Se fosse assim, não tinhas ficado com ele. Experimenta... e vais ver que podes aprender muito com ele..." (Professor/investigador, CI, registada no DB, Setembro 1997), ela lá se sentou, com uma cara contrariada e bem na pontinha da mesa, o mais longe possível do V., para mostrar o seu desagrado. Ele também não gostava da M., que achava convencida, "armada em boa" (V., E1, Dezembro 1997), sempre a hostilizar os mais pobres. Por isso, também se sentou na ponta da mesa, longe dela, e, enquanto os outros se sentavam, não interagiu com ela. Manteve-se sossegado e em silêncio, a olhar com um ar de desdém para o caderno, régua, borracha, lápis, "tudo cheio de florzinhas e a condizer, como têm as betinhas" (V., E1, Dezembro 1997).

Nestas circunstâncias, quando esta interacção começou, não é de estranhar a admiração da M. por o V. conseguir resolver as tarefas rapidamente e explicar como o tinha feito. Mas é ela, habitualmente sossegada, quem mostra irritação, pois não vê utilidade nos desenhos (estratégias de resolução por representação gráfica), visto que prefere raciocínios analíticos e estratégias de resolução aritméticas ou algébricas, aquilo que ela designava por "Matemática a sério", como expressou em diversas conversas informais, no primeiro mês de aulas. Ela achava que trabalhar com o V. seria uma espécie de "boa acção do ano" (M., E1,

Dezembro 1997), em que ela "não aprenderia nada e estava ali só para o ajudar a ele" (M., E1, Dezembro 1997). Com expectativas tão baixas, o espanto dela perante as resoluções dele, não são de estranhar. Mas as atitudes levam tempo a mudar e, por isso, apesar de ele resolver as tarefas, ela continuava a desconfiar da utilidade de trabalhar com ele.

O V. que, pela primeira vez, se sente apreciado numa aula de Matemática, pretende manter aquele clima interactivo agradável e sem conflitos. Por isso, está disposto a fazer concessões: se ela se irrita com ele, responde com calma; se ela insiste em começar pela Tarefa 1, ele aceita; se ela usa um tom de professora que fala com um aluno ignorante e pateta, ele não reage e continua a resolver as tarefas; e até lhe diz que a letra dele é feia e lhe pede para ser ela a escrever, o que pressupõe, implicitamente, que a letra dela é bonita. Mas, acima de tudo, deixou-a liderar, algo que não era habitual nele. Portanto, nesta primeira aula com conteúdos matemáticos daquele ano de escolaridade, o V. estava empenhado, a trabalhar, e não se parecia nada com o que dele descreviam os vários relatórios que tínhamos lido e que se referiam à sua participação nas aulas, em anos lectivos anteriores.

Mas o V. não era ingénuo e já tinha sido muito criticado na vida, escolar e social, muito acusado injustamente, dentro e fora da escola. Por isso, as formas de agir da M. não lhe passavam despercebidas, nem lhe agradavam. Era mesmo por uma opção consciente que ele tentava evitar conflitos com ela e que estava empenhado em que conseguissem trabalhar juntos. Mais tarde, na primeira entrevista, confidenciou-nos:

> No início, a M. nem sempre foi muito correcta comigo. Irritava-se, subtilmente chamava-me ignorante e parvo, tentava sempre mandar e desvalorizar o que eu fazia... Era parvoíce, porque eu desenhava, fazia esquemas... e nem importava se também resolvia as tarefas... Percebia que ela detestava trabalhar comigo, ou pior, detestava-me a mim e ao que eu representava: mais velho, com insucesso, pobre, cabo-verdiano, negro, do bairro. (...) Mas eu tinha Nível 1, problemas disciplinares, era do bairro, quem é que ía querer trabalhar comigo, sendo boa aluna? Por isso, eu percebi que tinha de ser paciente. Tinha de evitar os conflitos, mesmo quando me apetecia responder-lhe torto e mostra-lhe que, em

> argumentação, se eu quisesse, saía a ganhar. E, depois, talvez um dia ela percebesse que eu também sabia pensar... (V., E1, Dezembro 1997)

Este excerto revela que o V. conseguia identificar o que a M. sentia, quanto a trabalhar com ele e a *Me-position* dela em relação a ele (Hermans, 2001), ou seja, como ela o via, enquanto pessoa e enquanto aluno (César, 2013b). Porém, ele também não se considerava um par que uma aluna de topo pudesse desejar. Portanto, mesmo reconhecendo que ela o tratava mal, que não era correcta e sabendo a capacidade de argumentação que ele conseguia ter, decidiu ser paciente, dar-lhe tempo para ela se aperceber de como ele pensava e resolvia as tarefas, sem deixar os conflitos escalar. Esta decisão revelou muito mais maturidade emocional do que a habitual em adolescentes, sobretudo adolescentes em risco (Strecht, 2008), que vivem num bairro como aquele, que já foram vítimas de várias formas de discriminação negativa, nomeadamente racial. Por isso, não era apenas do ponto de vista cognitivo que o V. tinha capacidades e competências bastante desenvolvidas. Isso também acontecia do ponto de vista emocional e, neste domínio, a M. reconheceria, mais tarde, que tinha aprendido muito com ele, algo inimaginável para ela, no início do ano lectivo, quando começaram a trabalhar juntos. Como nos disse, no final desse ano lectivo, agora já o admirava e, sobretudo, tinha ganho maturidade emocional e deixado de ser tão competitiva.

> Eu só sabia o que era ter facilidades: boas notas, os 'stores a gostarem de mim, pais que me davam tudo, férias no estrangeiro, uma casa confortável, amigos como eu. Por isso, se era contrariada, amuava, irritava-me, não reagia bem à frustração. Queria ser sempre a melhor e não suportava quem era melhor que eu. E o V., muitas vezes, tinha raciocínios brilhantes, resolvia os problemas mais depressa e melhor do que eu, o que, no início, me irritava e, depois, passei a admirar... Com o V., aprendi o que era superar dificuldades a sério e isso fez-me amadurecer, tornar-me mais respeitadora de quem não é como eu e não teve as facilidades que eu tive. (M., E2, Junho 1998)

O professor/investigador sabia que, das 14 díades da turma, sete conseguiam ser mais autónomas, pois tinham pares com Níveis 4 ou 5 (quatro meninas)

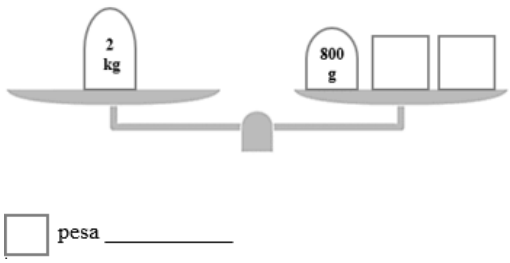
ou quase com Nível 3 (nível positivo mais baixo) e capacidades e competências mais desenvolvidas (IACC, observação). Como a turma incluía 24 alunos que tinham obtido nível negativo a Matemática, o que ele pretendia era tentar que estes 10 alunos chegassem rapidamente a uma classificação de nível positivo, para depois conseguir que interagissem com os alunos que precisavam de progredir mais, para atingirem um nível positivo. Também havia outras três díades com mais dificuldades e que poderiam precisar de ajuda para conseguirem começar a resolver as tarefas. Por isso, a sua prioridade era acompanhar mais de perto essas díades e ver se elas não bloqueavam. Por último, havia quatro díades menos autónomas do que as sete que já mencionámos, mas mais capazes de começarem a resolver as tarefas do que as três com maiores dificuldades. Assim, para evitar que as díades ficassem paradas, quando decidiu a distribuição espacial dos pares, pôs um dos que tinham mais facilidade à frente dos que tinham mais dificuldades (ver detalhes em César et al., 2014; Machado, 2014; Ventura, 2012). Deste modo, se o professor/investigador estivesse ocupado, as díades poderiam tirar uma pequena dúvida com uma das díades mais rápidas a resolver a tarefa, como o V. e a M. Isto significa que, naquele contrato didáctico, era legítimo falar com os colegas, se isso fosse breve e para avançarem na resolução das tarefas. No início, esta permissão causou alguma estranheza, pois os alunos estavam habituados a que fosse proibido falar com os colegas. Mas rapidamente perceberam que isso podia desbloquear uma dificuldade, quando o professor/investigador estava ocupado com outra díade, passando a usufruir dessa possibilidade de forma equilibrada, sem a usarem para conversas paralelas, sobre temas exteriores à aula.

Pelo que foi dito, o V. ter percebido que o professor/investigador estava ocupado a ajudar as díades que poderiam ter mais dificuldades (Fala 7), revela sensibilidade, capacidade de observação e vontade de que os diversos alunos possam usufruir das vantagens de terem um professor/investigador que se preocupa com a turma, como um todo, e tenta que todos eles atinjam desempenhos bem-sucedidos. Por ter sido tantas vezes excluído, discriminado negativamente e vítima de injustiças, na escola e fora dela, o V. estava particularmente atento à forma como ele e os colegas do bairro eram tratados. Assim, quando confrontado com um professor/investigador que respeitava as formas naturais de eles fazerem e aprenderem Matemática, que tentava arranjar estratégias para que todos

participassem nas aulas e estivessem motivados e a trabalhar, o V. colaborava e evitava que ele fosse chamado, apenas porque a M. queria ter razão e estava irritada. Esta atitude mostra que ele costumava liderar o grupo do bairro e que se preocupava com eles.

Figura 68

Enunciado da Tarefa 3, Ficha de Trabalho N.º 1



Resolvida a primeira página (Tarefas 1 e 2, Anexo 1), o V. e a M. viraram a folha e continuaram a resolução (Tarefas 3 a 6).

12. V. – Com os desenhos, esta também é fácil...
13. M. – Lá estás tu e os desenhos... [Suspira, com ar enjoado] Mas sabes fazer?
14. V. – Se tirarmos 800 g aos 2 kg ficam 1200 g... e há dois pesos... é dividir por 2, dá 600 g, cada peso do lado direito. Queres escrever?

[A M. continuava admirada, a olhar para ele, mas lá pegou na caneta e escreveu a resolução dele]

(V. e M., O, registada em áudio, Setembro 1997)

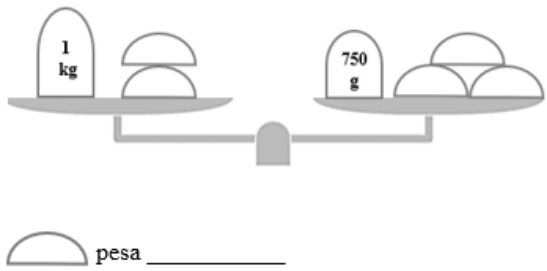
No início deste excerto, o V., cuja L1 é o crioulo, volta a afirmar como existirem representações gráficas é importante para ele (Fala 12). Apesar de ele estar a usar uma estratégia de resolução aritmética, ele pensa a partir da figura que está desenhada, ou seja, o seu raciocínio é configurado pelo desenho que está na folha, sendo um raciocínio espacial. A M., cuja L1 é o português, prefere raciocínios analíticos e uma estratégia aritmética ou algébrica. Por isso, na Fala 13, desdenha da necessidade de representações gráficas e volta a perguntar-lhe aquilo que a ela lhe interessa: se ele sabe resolver. Mas, como, na Fala 14, o V.

resolve a tarefa muito rapidamente e explicita a sua resolução facilmente, ela fica como que atordoada e leva um bocado a reagir e a escrever a resolução na folha. Por enquanto, vemos que a M. ainda não confia nas capacidades e competências do V., e que ele continua empenhado em evitar conflitos e em conseguir trabalhar com ela. A desconfiança e as baixas expectativas dela eram demasiado grandes para mudarem só porque ele conseguiu resolver três tarefas, sobretudo porque continua a focar a importância de haver desenhos e, para ela, "Matemática são contas e equações, não são desenhos" (M., CI, registada no DB do professor/investigador, Setembro 1997).

Como se vê, na Tarefa 3, esta díade foi muito rápida e, neste momento, era a mais avançada, pois já tinha resolvido três tarefas e registado as respectivas resoluções na folha de respostas. Como a M. era competitiva e gostava de ser a primeira, passou logo para a Tarefa 4 (Figura 69) e a velocidade a que progrediam era um critério positivo, para ela. Afinal, o V. não a estava a prejudicar assim tanto.

Figura 69

Enunciado da Tarefa 4, Ficha de Trabalho N.º 1



15. M. – Esta parece mais complicada [refere-se à Tarefa 4], porque tem pesos dos dois lados...

16. V. – Mas os pesos são todos iguais... por isso podem-se cortar dois de cada lado... e já fica mais fácil... [Pega na folha e corta dois pesos no prato da direita e dois no da esquerda]

17. M. – Que parvoíce é essa? A folha é dos dois e eu não quero cortar nada! [Diz irritada] Ó 'stor, pode vir aqui, por favor... [Diz mudando o tom de voz e

pondo a mão no ar, para lhe chamar a atenção. O professor/investigador aproxima-se.]

18. Prof. – Então, qual é a dúvida?

19. M. – Ele cortou pesos na folha e eu não concordo. Não lhe dei autorização para isso [Diz, num tom menos simpático e um bocado autoritário]

20. Prof. – Têm de estar de acordo, antes de escrever na folha [A M. sorri, vitoriosa], mas tu não tens de lhe dar autorização. Tu não mandas nele, nem ele em ti. Se têm maneiras diferentes de pensar e de resolver, escrevem as duas.

21. M. – Mas, para isso, precisamos de ter duas folhas, para eu fazer a minha e ele a dele...

22. V. – Isso era se fizessemos individualmente e estamos a trabalhar a pares... [Diz, baixinho, olhando para o professor/investigador, para ver a reacção dele]

23. M. – Mas, se não concordamos, não podemos trabalhar os dois. Cada um tem de fazer o seu!

24. Prof. – Cada um faz o seu, à vez, na folha... na mesma folha [sublinha o mesma, quando fala]. Depois, cada um explica a sua resolução ao outro e, assim, até ficam a saber duas maneiras de resolver. [Afasta-se, sem dar tempo à M. de contestar]

(M., V. e Professor/investigador, O, registada em áudio, Setembro 1997)

Na resolução da Tarefa 4, o V. não conseguiu evitar o conflito (Fala 17), o que levou a M. a chamar o professor/investigador, para tentar que ele validasse a sua opinião (Fala 19) e a deixasse trabalhar sozinha, dando-lhe uma folha de respostas só para ela (Falas 21 e 23). Assim, ela tenta boicotar as regras do contato didáctico, em que deviam trabalhar de forma colaborativa e dialógica, em díade, e tenta que o professor/investigador a deixe trabalhar individualmente, o que a livraria de ter de trabalhar com o V., que ela considera que não sabe Matemática e só a prejudica. Mas o professor/investigador reforça as regras do contrato didáctico (Falas 20 e 24), deixando claro que as devem respeitar: cada um escreve a sua resolução e explica ao outro o que fez, para aprenderem mais. A M. tentou aquilo que diversos alunos com classificações elevadas gostariam de fazer: deixar de interagir com um par que ela julgava menos competente (Vygotsky, 1934/1962). Porém, no projecto IC fomentava-se a alternância do par mais competente, pelo que o professor/investigador tinha selecionado tarefas em que, umas

vezes, aquelas quatro meninas seriam o par mais competente e outras não, para que tanto elas, como os pares delas, trabalhassem na ZDP (César, 2009, 2013a, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b), promovendo o desenvolvimento e a aprendizagem. Assim, tendo em consideração as capacidades e competências de cada um, o professor/investigador previa que, quando chegassem à Tarefa 6, a M. ia precisar da ajuda do V. e de aprender a estratégia de resolução que ele usara. Nada na escolha desta ficha de trabalho tinha sido inocente e era precisamente esta alternância do par mais competente que poderia mostrar às alunas que obtinham classificações mais elevadas, em anos lectivos anteriores, que também podiam aprender Matemática com os pares com quem estavam a trabalhar em díade.

Mais uma vez, o tom mais desagradável (Fala 17), é da M., apesar de ela nunca ser descrita como uma aluna que agisse de forma desajustada, em termos disciplinares. Mas ela só costumava interagir com os professores e as outras três meninas, ou seja, com quem a apreciava e elogiava. Agora, que estava a interagir com o V., tentava impor uma autoridade (Fala 19), que o professor/investigador realça que nem ela, nem nenhum aluno, tem (Fala 20). O que ele reforça, é a co-responsabilização pelas resoluções que constam da folha de respostas, pelo que cada um tem de também aprender e saber explicar a resolução do outro (Fala 24). Curiosamente, o V., descrito em tantos relatórios como conflituoso, desafiador e desobediente, é aquele que reconhece que só fariam cada um na sua folha, se estivessem a trabalhar individualmente e não em díade (Fala 22), ou seja, mesmo não sendo muito bem tratado e respeitado pela M., ele aderiu ao contrato didáctico e tenta que exista trabalho colaborativo e dialógico. Mas, como se sente (ainda) inseguro quanto ao apoio do professor/investigador em relação às suas formas de agir, quando fala, para subscrever o contrato didáctico que este propôs, usa um tom de voz muito baixo, como se falasse a medo.

Nos minutos seguintes, o V. termina a sua estratégia de resolução, na folha de respostas, e a M., depois, também escreve a dela. O V. cortou dois pesos de cada lado, simplificando a representação gráfica, ou seja, usou uma primeira estratégia de resolução que César (1994) designa por estratégia de simplificação, através de uma manipulação de variáveis, complementada com uma breve estratégia aritmética, para calcular o peso que faltava. Quem usa uma estratégia de

simplificação, prefere uma abordagem global do problema, ou seja, olha para a balança como um todo, comparando os dois pratos ao mesmo tempo. Depois de simplificar a representação gráfica, ele tinha 1 kg no prato da esquerda e 750 g e um peso, no da direita. Portanto, fez uma subtracção (1000 – 750) e obteve o resultado: 250 g. Assim, o V., como a maioria dos alunos cuja L1 é o crioulo, prefere uma abordagem global do problema, um raciocínio espacial e uma estratégia de resolução que começa por uma estratégia de simplificação (manipulação de variáveis), que lhe permite, depois, usar uma estratégia aritmética, para finalizar a resolução.

A M. escreve e resolve uma equação, ou seja, prefere uma abordagem passo-a-passo (primeiro o que está num prato, depois no outro, lendo da esquerda para a direita, como na língua portuguesa), um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução algébrica, como é habitual em alunos cuja L1 é o português (César, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b):

$$1000 + 2x = 750 + 3x$$

$$1000 - 750 = 3x - 2x$$

$$250 = x$$

R: Cada peso era de 250 g

Quando terminaram, sabiam que tinham de explicar um ao outro o que tinham feito. A M., apesar de ter sido a última a escrever a resolução, assumiu novamente a liderança, algo de que ela ainda não conseguia abdicar (Fala 25). Explicou logo a resolução dela, que se baseava num raciocínio analítico e numa estratégia de resolução algébrica.

> 25. M. – Eu traduzi a balança numa equação e, como os pesos são todos iguais, chamei x a cada variável. O prato da esquerda corresponde a $1000 + 2x$ e o da direita a $750 + 3x$...
> 26. V. – Então, o sinal de igual, na balança, corresponde a ela estar equilibrada..
> 27. M. – Que parvoice é essa agora? Uma equação é Matemática, é álgebra, não é desenhos, nem balanças...

28. V. – Eu acho que a balança é uma metáfora... como naquela dos assaltos [refere-se à Tarefa A, do IACC], na última aula, a *pizza* também era uma metáfora em relação aos assaltos, foi o que o 'stor disse... Lembras-te?
29. M. – Talvez possa ser... Já perguntamos ao 'stor... Mas deixa-me continuar... Depois, foi só resolver a equação... Sabes resolver equações?
30. V. – Não. Eu sou nulo a Matemática. Tive Nível 1. Mas, este ano, percebi que sei olhar e pensar através do que vejo e o que vi foi que mudaste o sinal quando mudaste de lado... quer dizer... estava + 2x e puseste – 2x, quando mudou de lado... Visualmente, foi isso que mudou... Mas não percebi o 750, porque esse não tinha sinal nenhum e tu também puseste – 750...
31. M. – Até não és parvo de todo, como eu pensava... Isso do x está bem observado... Quanto ao 750, se não tinha sinal é porque é positivo, é sinal +. Portanto, fiz como disseste: se muda de membro – é assim que se chama – muda para a operação inversa. A inversa de – é + e a de multiplicar é dividir.
32. V. – E depois, fizeste as contas e x, que é o peso, deu-te o mesmo que a mim, porque eu também disse que o peso valia 250 g. Portanto, se as duas resoluções estiverem certas, obtemos o mesmo resultado...
33. M. – Pois... eu não achava que se podiam cortar pesos, mas se deu o mesmo resultado, tu também deves ter feito bem. Já confirmamos, quando for a correcção no quadro [refere-se à discussão geral]. Eu sei explicar a tua. Tu consegues explicar a minha?
34. V. – Na boa. Não sei fazer equações, mas esta percebi.
(M. e V., O, registada em áudio, Setembro 1997)

O primeiro aspecto a salientar é que, neste episódio, não há conflitos. A competitividade da M. e o seu estatuto de aluna de topo, em Matemática, levam-na a assumir a liderança e a querer explicar a resolução dela em primeiro lugar (Fala 25). Ainda há algumas picardias dela (Falas 27, 29 e 31), em que até o suposto elogio – "Até não és parvo de todo, como eu pensava" – tem subjacente uma crítica negativa: ela achava que ele era. Aliás, as dúvidas dela em relação às capacidades e competências do V. estão bem patentes na Fala 31, em que ela diz que talvez a balança possa ser uma metáfora para as equações, mas é apenas talvez, não é reconhecer que é. A desconfiança dela volta a ser nítida na última fala (Fala 33) quando, perante o mesmo resultado, apenas reconhece que "deves ter feito bem", mas que só terão a certeza na discussão geral. Ela continua

desconfiada de que se possam cortar pesos, de que "ver" Matemática seja algo legítimo, e nem a capacidade de observação e visualização revelada pelo V., quando deduz uma regra da resolução de equações, a faz mudar de ideias. O V. ter sido capaz de deduzir esta regra de resolução das equações do 1.º grau a uma incógnita é um exemplo nítido de como é importante os alunos partirem dos seus raciocínios e estratégias de resolução naturais para, depois, atingirem outros, mais formais.

Porém, como o V. não reage às provocações dela, pois quer é estar em paz, conseguir aprender e participar nas aulas (Falas 28, 30 e 32), o clima acaba por não ser conflituoso e eles explicam, ambos, a sua resolução e conseguem aprender a resolução do outro, o que é importante para respeitarem as regras do contrato didáctico (César, 2009, 2013b). No entanto, apesar de estar aqui um esboço de trabalho colaborativo, eles continuam sentados cada um na ponta da mesa. Portanto, espacialmente, o afastamento ainda é visível, traduzindo o desconforto em trabalharem juntos e a desconfiança que existe, sobretudo por parte da M., que não acredita que possa aprender nada com o colega.

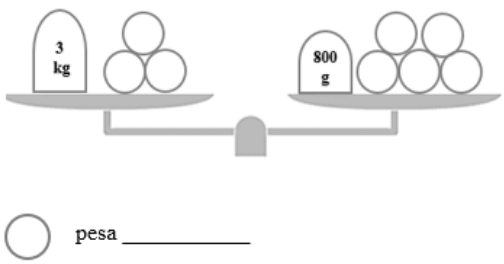
O V. está convencido que "é nulo" a Matemática (Fala 30), mas já acredita que é capaz de aprender e mostra uma enorme capacidade de visualização, que o leva a perceber, pela observação das mudanças dos sinais, uma das regras da resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita. Por sua vez, a M., que fica impressionada com a perspicácia do V., explica-lhe mais detalhadamente como se resolvem equações (Fala 31), explicitando o que são operações inversas. O futuro mostrará que o V., quando aprende algo, não se volta a esquecer e estas regras das resoluções de equações do 1.º grau a uma incógnita serão utilizadas por ele nas próximas aulas, afirmando claramente que as tinha aprendido com ela. Isso também estava patente neste excerto do processo interactivo, quando ele se lembra de que, na discussão geral do IACC, o professor/investigador mencionou que a *pizza* era uma metáfora para o que estava escrito na notícia da Tarefa A (Fala 28).

Como a resolução da Tarefa 4 correu bem e num clima de alguma tranquilidade, o V. arrisca fazer uma sugestão (Fala 35): que agora, na folha de respostas, cada um escreva a estratégia de resolução que o outro usou na Tarefa 4, para confirmarem se conseguiram aprender aquela maneira de a resolver. A M. fica

espantada com esta sugestão, mas não se lhe opõe, sugerindo mesmo que seja o V. a começar (Fala 36), o que o V. aceita (Fala 37). Assim, ela retoma a liderança e eles começam pela resolução de equações, a estratégia de resolução que ela prefere e a única que ela considera válida, em Matemática. Apesar disso, o processo interactivo deles evoluiu positivamente e, agora, já estão a trabalhar de forma colaborativa e dialógica. A M. já aceitou aprender a estratégia de resolução do V., como era desejável, respeitando as regras do contrato didáctico. Este é o único momento de todo este processo interactivo em que o V. assume a liderança. Mas faz isso de uma forma breve, com um tom de voz suave, como se fosse apenas uma pequena sugestão e não uma liderança. Mais uma vez, mostra uma maturidade emocional bem desenvolvida, pois sabe que a M. reagiria mal se ele liderasse de forma ostensiva.

Figura 70

Enunciado da Tarefa 5, Ficha de Trabalho N.º 1



35. V. – Se calhar, agora podíamos fazer ao contrário: eu resolvia com uma equação e tu cortavas os pesos, como eu fiz. Assim, vemos se aprendemos mesmo a resolução do outro. O que achas?

36. M. – Não tinha pensado nisso, mas até nem acho mal... Queres começar tu?

37. V. – Pode ser. Então... [Olha para a figura da Tarefa 5] Cada peso é x... do lado esquerdo, temos 3 kg, que são 3000 gramas. Por isso, escrevo:

$$3000 + 3x = 800 + 5x$$

38. M. – Boa! Já conseguiste traduzir a balança numa equação. Agora, é só resolveres... [E o V. continua a resolução, escrevendo o que está abaixo]

$$3000 - 800 = 5x - 3x$$

$$2200 = 2x$$

39. V. – E agora? Espera, deixa-me pensar... [Volta à figura, pega num papel de rascunho, corta os pesos e vê que tem de dividir 2200 por 2] Ah! Já percebi... Fica:

$$\frac{2200}{2} = x$$

$$1100 = x$$

40. V. – Portanto, como me explicaste, na outra, que dividir é a inversa de multiplicar, então $2x$ deve querer dizer é... é duas vezes x, é uma multiplicação... É isso?

41. M. – Uauh!... Tu és mesmo esperto! Como é que tinhas 1 a Matemática?

42. V. – Achava que nem valia a pena tentar...

(V. e M., O, registada em áudio, Setembro 1997)

A sugestão do V. (Fala 35), que a M. aceitou (Fala 36), mostrou que ele já tinha aprendido uma parte das regras de resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita. Foi capaz de traduzir a balança numa equação (Fala 37), algo que a M. elogia (Fala 38), desta vez de uma forma franca e sem subtilezas negativas implícitas. Portanto, pela primeira vez, nesta fala existe admiração nítida pelo que ele aprendeu nesta aula. É o início de uma mudança de atitude, por parte da M., embora, como é habitual nestes processos, haja avanços e recuos. Noutras aulas, isso será visível, como quando analisarmos a resolução da tarefa referente à venda do queijo.

Depois, o V. consegue continuar a resolução, até ter uma dificuldade, sobre algo que a M. ainda não lhe explicara. Mas, em vez de lhe perguntar, revela persistência na tarefa e resiliência: pede-lhe que o deixe pensar (Fala 39), volta à figura, esboça a estratégia de resolução natural para ele, uma estratégia de simplificação (manipulação de variáveis) e, a partir daí, consegue perceber como resolve a equação (Falas 39 e 40). A atitude dele e a capacidade de ultrapassar aquela dificuldade, fazem a M. expressar, de forma inequívoca, a sua admiração pela velocidade de aprendizagem dele e perguntar-lhe porque tinha Nível 1 a Matemática (Fala 41). Esta pergunta da M. e a resposta do V. revelam bem o drama dos alunos cuja L1 é o crioulo e que não podem, em aula, usar os raciocínios e estratégias de resolução que lhes são naturais. Como o V. lhe explica (Fala 42), ele nem tentava.

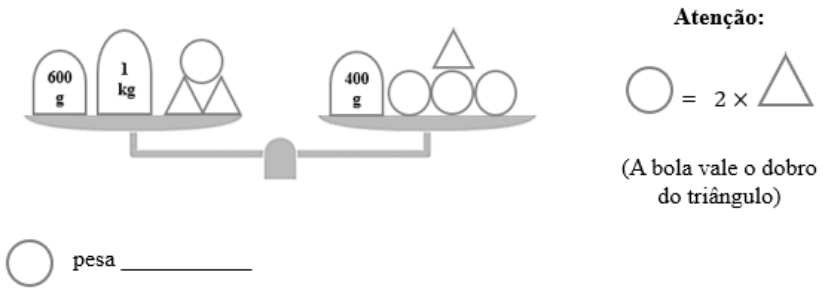
Com aquelas tarefas e o contrato didáctico proposto pelo professor/investigador, podendo recorrer às suas formas naturais de raciocínio e estratégias de resolução, quando disso sente necessidade, ou seja, sentindo-se valorizado e respeitado, o V. já está disponível para aprender outras, como uma estratégia de resolução algébrica, quando resolve equações do 1.º grau a uma incógnita. Sobretudo se, mesmo nas equações, o deixarem "ver" as regras, ou seja, deduzi-las a partir da visualização das alterações dos sinais. Assim, este pequeno episódio ilustra bem como muito alunos que podiam ser excelentes a Matemática, como o V. e tantos outros que participaram no IC, acabavam por obter nível negativo, abandonando a Escola precocemente. Como tínhamos previsto, quando analisámos as suas resoluções no IACC e observámos a velocidade com que respondeu, o V. podia ser um excelente aluno a Matemática. Isso, provou-o o tempo: teve 100% na prova final de escola, no 9. º ano de escolaridade (elaborada por professores que não lecionavam esse ano de escolaridade e corrigida por eles) e 20 valores – a nota máxima – na prova nacional de 12.º ano de escolaridade (vulgo exame nacional), bem como a Geometria Descritiva, onde a capacidade de visualização e os raciocínios espaciais e geométricos são fundamentais.

A Tarefa 6 (Figura 71), a última desta ficha de trabalho, era mais complexa, pois tinha dois tipos de pesos, representados por triângulos e círculos, designados por bolas, na ficha de trabalho. Estava escrito que a bola valia dois triângulos. Por isso, o V. disse que aquela tarefa só conseguia resolver se pensasse à maneira dele (Fala 43) e combinaram que ele resolvia assim e a M. com equações (Falas 43 e 44). Mas esta decisão é por mútuo acordo. Resolvem utilizar uma folha de rascunho, algo sugerido pela M., que mostra que ela já não quer uma ruptura com as regras do contrato didáctico. A M. até convida o V. a ser ele a começar, algo que ele aceita. Portanto, aqui, cada um deles vai seguir a abordagem, raciocínio e estratégia de resolução que lhe são naturais, mas estão ambos a ver o que o outro faz e a interagir e, por isso mesmo, a trabalhar de forma colaborativa e dialógica. Aliás, o V., que é o primeiro a falar, existindo aqui outro esboço de liderança, suave, pois termina com "O que achas?" (Fala 43), revela logo que, depois, quer aprender a resolver a tarefa com equações. Isso ilumina que não há conflito, nem oposição, nem picardias. O que existe, é algo que observamos frequentemente: perante um problema mais complexo, com um maior grau de

dificuldade, os alunos sentem necessidade de voltar às suas estratégias de resolução naturais.

Figura 71

Enunciado da Tarefa 6, Ficha de Trabalho N.º 1



43. V. – Esta só consigo se pensar à minha maneira. Depois eu quero aprender a tua, mas não sei fazer isto com equações. E se tu fizesses com equações e eu à minha maneira? O que achas?

44. M. – Tudo bem. Fazemos numa folha de rascunho e vamos explicando. Depois passamos para a folha de respostas. Queres começar tu?

[O V. desenha a balança na folha de rascunho, mas substitui cada bola por dois triângulos e, assim, só tem um tipo de pesos]

45. V. – Pode ser. Então... cada bola vale dois triângulos, por isso fiquei com quatro triângulos na esquerda e sete na direita, posso cortar quatro de cada lado e só me restam três triângulos do lado direito. Isso facilita muito... Depois, tenho 1600 g do lado esquerdo e, da direita, tenho 400. Subtraindo, ficam 1200 gramas, que vou dividir pelos três pesos e dá 400 g cada um. Percebeste?

(V. e M., O, registada em áudio, Setembro 1997)

O V. é extremamente rápido e seguro a explicar a sua resolução (Fala 45). Mais uma vez, prefere uma abordagem global do problema, em que vê a balança como um todo, percebendo logo que é melhor transformar todos os pesos em triângulos. Ao conversar com a M., quando já tinham terminado a resolução de todas as tarefas e aguardavam o final da aula, explicou-lhe um detalhe importante: "Escolhi transformar as bolas em triângulos e não ao contrário porque, no prato da esquerda, há dois triângulos, equivalentes a uma bola. Mas, à direita, só

há um triângulo, o que seria meia bola e complicaria muito as contas." (V., O, registada em áudio, Setembro 1997). Esta explicação posterior ilumina a abordagem global do problema e, também, um raciocínio espacial muito desenvolvido, pois o V. não hesita sobre a simplificação que deveria fazer. Noutras díades, houve quem começasse por substituir os triângulos por bolas e, só depois de o fazer, tenha percebido que deveria realizar a substituição das bolas por triângulos, revelando um raciocínio espacial menos desenvolvido. Esta explicação posterior sublinha a importância que teve para o V. poder "ver" a Matemática, ou seja, perceber que as suas formas naturais de pensar e fazer Matemática eram aceites.

O raciocínio de base da resolução do V. é espacial, assente numa estratégia de simplificação, por manipulação de variáveis, que lhe permite realizar dois passos essenciais: (1) reduzir as duas variáveis (bolas e triângulos) apenas a uma (triângulos), uma vez que cada bola é equivalente a dois triângulos; e (2) como nas Tarefas 4 e 5, corta quatro triângulos de cada lado, ou seja, corta as variáveis iguais, repetidas em cada um dos pratos da balança, simplificando-a. Por isso, a maior parte da resolução dele, tem como base a visualização, ou seja, aquilo que para ele é natural, que ele mobiliza facilmente. A seguir, como a balança já foi transformada numa figura mais simples, recorre a uma estratégia de resolução aritmética, chegando ao valor de cada peso: 400 g. Nesta última tarefa, mais complexa, o V. recorreu à abordagem do problema, tipo de raciocínio e estratégia de resolução preferida pelos alunos cuja L1 era o crioulo.

A forma clara como explica o seu raciocínio e estratégias de resolução, faz com que a M. não tenha dúvidas e sugira que passem à estratégia de resolução algébrica, aquela que ela prefere (Fala 46). Mas, desta vez, a M. já não teceu qualquer comentário negativo sobre a resolução do V., apenas considerando que a resolução através de uma equação (estratégia de resolução dela) permitiria mostrar "se fizeste bem", ou seja, verificar a validade da resolução dele. Porém, surge uma dificuldade, com que a M. não contava: consegue escrever a equação correspondente àquela balança, mas, como usa duas variáveis diferentes na mesma equação, não consegue concluir a resolução e fica a pensar, havendo um longo momento de silêncio.

46. M. – Percebi. Agora vamos ver se fizeste bem, confirmando com uma equação. Como temos dois tipos de pesos, temos de ter duas variáveis: x e y. Os triângulos são x e as bolas são y. Fica:

$$600 + 1000 + 2x + y = 400 + x + 3y$$
$$1600 - 400 = x - 2x + 3y - y$$
$$1200 = -x + 2y$$

[A M. fica parada, a pensar. Há um longo momento de silêncio]

47. M. – E agora? Não sei resolver isto... Tu sabes?

48. V. – Eu? Achas? [Sorri] Mas há uma coisa que sei: também te deu 1200, como a mim, antes de dividir pelos três triângulos que me sobravam do lado direito..

49. M. – Sim, isso é verdade. Mas o que é que eu faço àquelas duas variáveis? Que treta! [Irritada, mas com ela própria]

[Ficam mais um bocado em silêncio, ela a olhar para a equação e ele para a figura]

(M. e V., O, registada em áudio, Setembro 1997)

Mesmo pensando e verificando o que fez, a M. não sabe como continuar a resolução e pergunta ao V. se ele sabe (Fala 47), ao que ele responde: "Eu? Achas?" (Fala 48), revelando, implicitamente, que ele continua a achar-se "um zero em Matemática", como escreveu no Q1. Porém, como ele "vê" a Matemática, ou seja, raciocina partindo da visualização, repara que a ela também lhe deu 1200, como a ele, antes de dividir pelos três triângulos que lhe sobravam no prato da direita, depois da estratégia de simplificação, por manipulação de variáveis (César, 1994). Por isso, na Fala 50, embora sem saber se aquela sugestão é "muito parva", acha que, se usassem apenas uma variável, como ele fez no desenho da balança, talvez a M. soubesse resolver a equação. Assim, mesmo estando a usar uma estratégia de resolução algébrica, ele tenta seguir uma abordagem global do problema e partir de uma estratégia de simplificação, baseada na manipulação de variáveis. Aqui, é curioso que ele já está a recorrer a uma mistura do que lhe é natural – abordagem global, estratégia de resolução por representação gráfica e de simplificação, por manipulação de variáveis – com o que aprendeu nesta aula: uma estratégia de resolução algébrica. Isto constitui um excelente exemplo das vantagens de trabalhar de forma colaborativa e dialógica, em díades cujas

capacidades e competências são complementares e onde ambos agem, alternadamente, como par mais competente (César, 1998b, 2009, 2013a, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b). Esta resolução do V. é um exemplo nítido de como se pode ser empoderado, ganhando *agency*, a partir da forma como se operacionaliza o currículo e das modalidades de trabalho utilizadas: o trabalho colaborativo e dialógico, em díades com capacidades e competências complementares.

> 50. V. – Se calhar isto é muito fora... muito parvo... Mas podíamos usar só x. Se as bolas valem dois triângulos, na esquerda temos $4x$... cada triangulo é um x e temos dois... e cada bola vale $2x$... e na direita temos $7x$... e já é parecido com o meu desenho... [Olha para ela]
> 51. M. – Não sei... Achas?
> 52. V. – Tu é que sabes equações. Tens alguma ideia melhor?
> 53. M. – Não. Por isso, 'bora lá tentar...
>
> $$600 + 1000 + 2x + 2x = 400 + x + 6x$$
> $$1600 + 4x = 400 + 7x$$
> $$1600 - 400 = 7x - 4x$$
> $$1200 = 3x$$
> $$\frac{1200}{3} = x$$
> $$400 = x$$
>
> 54. V. – Dá o mesmo resultado que à minha maneira...
> 55. M. – Pois... talvez esteja bem... mas não sei bem se está...
> (V. e M., O, registada em áudio, Setembro 1997)

A M. não está muito convencida (Fala 51), mas perante um elogio do V. "Tu é que sabes equações" (Fala 52) e a falta de uma ideia melhor do que aquela (Fala 53), decide tentar. Escreve a equação usando apenas a variável x, uma vez que cada bola equivale a dois triângulos e, desta vez, não sente qualquer dificuldade na resolução da equação de 1.º grau a uma incógnita, que o V. vai acompanhando, muito interessado. No final, ele reconhece que ela obteve o mesmo resultado (Fala 54), mas a M. continua pouco convencida (Fala 55), algo que só será ultrapassado na próxima aula, quando fizerem a discussão geral desta ficha de trabalho e ela perceber que, na Tarefa 6, eles foram os únicos que conseguiram

usar duas estratégias de resolução alternativas, o que a deixa orgulhosa do trabalho que realizaram, em conjunto, quando trabalhavam em díade.

Apesar do processo interactivo entre o V. e a M. ter evoluído positivamente, deixando de haver picardias e comentários negativos por parte da M., a partir da resolução da Tarefa 4, as desconfianças da M. em relação às estratégias de resolução do V. mantinham-se, como ilustra a última fala (Fala 55). Passar da desconfiança à admiração leva tempo e esta era apenas a primeira aula em que estavam a trabalhar em díade. Por isso, observar-se esta evolução era tudo o que poderíamos desejar e, para outros passos, que revelassem mais aceitação um do outro, seria preciso mais tempo, mais processos interactivos, conhecerem-se melhor. Neste momento, eles já trabalhavam de forma colaborativa e dialógica, mas as marcas espaciais da desconfiança mútua continuavam lá: cada um estava sentado na ponta da mesa, o mais afastado possível. Por isso, quando tinham de escrever na folha de respostas, passavam-na um ao outro e quando queriam seguir a resolução do outro, esticavam o pescoço, mas não aproximavam as cadeiras. Isso, aconteceria depois, mais tarde, depois do próximo episódio interactivo, que iremos analisar.

É importante realçar, mais uma vez, como é essencial permitir que os alunos partam das suas abordagens, raciocínios e estratégias de resolução naturais. A estratégia de simplificação, por manipulação de variáveis, só foi utilizada por alunos cuja L1 era o crioulo e que preferiam raciocínios geométricos e espaciais, com uma forte componente de visualização, bem como estratégias de resolução por representação gráfica. Nos problemas mais complexos (Tarefas 4 a 6), os seus contributos foram fundamentais para as díades em que participavam conseguirem concluir a resolução com sucesso. Estes alunos, tal como o V., tinham obtido classificações negativas em Matemática e detestavam equações. Estavam convencidos de que eram "incapazes de aprender Matemática", "um zero em Matemática" ou "daqueles que erram tudo, tudo, tudo", como vários escreveram no Q1, nos disseram em conversas informais e nas entrevistas.

É muito provável que, sem uma primeira semana de aulas diferente do habitual, sem terem visto as formas naturais de resolução respeitadas e apreciadas, durante a discussão geral do IACC, eles se tivessem negado a tentar aprender equações, para não serem confrontados com mais críticas e fracassos, como tinha

sucedido em anos lectivos anteriores. Mesmo na última folha (Anexo 1, Ficha de Trabalho N.º 2), em que se pedia expressamente que traduzissem as balanças em equações do 1.º grau, nenhum aluno se negou a participar e muitos conseguiram fazê-lo sem dificuldade, o que ilustra a relevância da natureza das tarefas na promoção dos desempenhos matemáticos e do sucesso académico. O próprio trabalho colaborativo e dialógico, em díade ou em pequenos grupos, só funciona se a natureza das tarefas, propostas em aula, for adequada, ou seja, fomentar a interacção entre pares, permitir a alternância do par mais competente e o recurso a abordagens do problema, tipos de raciocínio matemático e estratégias de resolução diversificadas.

A relevância de usarem as suas formas naturais de abordagem dos problemas, raciocínios e estratégias de resolução é realçada pelo V., na primeira entrevista, quando participava no projecto IC há três meses.

> Lembra-se de como eu aprendi a dividir fracções naquelas primeiríssimas aulas? Nem sequer era uma aula... Foi durante um intervalo, quando fiquei a falar consigo... Foi tão estranho!!! Eu, numa sala de aula, durante um intervalo!!! Bolas!!! (...) Nunca pensei que podia ver Matemática... Ver mesmo... Antes de fazer como na Matemática da escola... Mas desde que consegui... Desde que podia ver e depois aprender a "verdadeira Matemática", passou a funcionar. Gostei. Gostei mesmo de alguns problemas, de os discutir com a M. (V., E1, Dezembro 1997)

O V. reconhece, de forma nítida, que só acreditou que conseguia aprender Matemática quando se apercebeu de que "podia ver a Matemática...Ver mesmo...", o que significa que os mecanismos de *inter-empowerment* utilizados pelo professor/investigador e as mensagens implícitas, que este usou, desde a primeira semana de aulas, surtiram efeito. Possibilitaram que o V. internalizasse alguns desses mecanismos, transformando-os em mecanismos de *intra-empowerment*, que ele já conseguia usar de forma autónoma, quando trabalhava com a M., como se constatou na resolução das primeiras tarefas sobre equações, que analisámos anteriormente. Estes mecanismos de *intra-empowerment* foram essenciais para o V. conseguir resistir a algum sarcasmo da M., sem desistir de usar

uma estratégia de resolução por representação gráfica, ou uma estratégia de simplificação, por manipulação de variáveis. Portanto, contribuíram para alterar o seu *dialogical self* (Hermans, 1996, 2001, 2003), nomeadamente a sua *I-position* enquanto aluno de Matemática e enquanto colega da M., bem como a sua representação social de si, enquanto aprendente de Matemática.

Aquilo a que ele chama "poder ver" é ser permitido que recorresse às suas formas naturais de fazer e aprender Matemática, algo que foi fomentado desde a discussão geral do IACC. A descrição dele é muito clara: ele precisa de "ver", antes de fazer como na "matemática da escola", que o V. associa a raciocínios analíticos e estratégias de resolução aritméticas ou algébricas, que nesta altura ele ainda designa por "a verdadeira Matemática". Isto significa que ele participa na aula, resolve as tarefas, mas continua convencido de que, aquilo que faz, não é Matemática. Isto ilumina como anos e anos de críticas à forma natural de pensar e fazer Matemática podem deixar marcas profundas, levando mesmo os alunos a deixarem de tentar fazer ou aprender Matemática, como o V. explicitou, na interacção anterior, quando trabalhavam em díade.

O outro ponto fundamental deste excerto, é a maneira rápida como ele aprendeu a dividir fracções, durante o intervalo maior da manhã (20 minutos), algo que ele próprio descreve como inacreditável, pois costumava ser dos primeiros a sair, assim que a campainha tocava, anunciando o intervalo. Estar suficientemente interessado em aprender conteúdos matemáticos para ficar a falar com a investigadora no intervalo, é algo que ele nunca imaginou que pudesse acontecer. Mas, depois desse momento e da interacção que vamos analisar a seguir, o V. não voltou a esquecer-se do que então aprendeu. Essa era uma característica impressionante dele: aprendia depressa, trabalhava muito concentrado e, uma vez aprendido, não se voltava a esquecer e construía mais conhecimentos matemáticos a partir desse, que já tinha apropriado. Estas características estavam em profunda contradição com tudo o que tínhamos lido sobre ele, nos relatórios de anos lectivos anteriores, onde chegou a ser descrito como "incapaz de aprender Matemática".

Um último aspecto a salientar é que ele reconhece que, desde que possa "ver" e depois aprender – para ele, "ver" é usar estratégias de resolução por representação gráfica, ou de simplificação, ainda não é Matemática – "passou a

funcionar", ou seja, ele começou a conseguir aprender a Matemática mais formal, que ele designa por "Matemática da escola" e gostou, tal como apreciou discutir algumas tarefas com a M., a colega com quem trabalhava, na primeira díade em que participou. Esta constatação é muito importante: os alunos, mesmo os que apresentam formas de actuação disruptivas, gostam de ser valorizados e de conseguir resolver as tarefas, como salientava César (1998a, 1998b, 2009). Mas, se falham muitas vezes, se são muito criticados, para se defenderem, deixam de tentar e passam a assumir que a Escola não lhes interessa. Porém, quando conseguem ser bem-sucedidos numa resolução, ficam contentes, o que mostra como é fundamental usar os MPD (César, 2024b) para formar as díades, assim como mecanismos de *inter-empowerment*, mensagens implícitas e estabelecer um contrato didáctico que permita valorizar as suas potencialidades, contribuindo para o seu desenvolvimento e aprendizagem. Para os alunos que puderam ter vivências destas, em que se sentiram, finalmente, acolhidos e valorizados, há um antes e um depois, como o V. explicitou nesta entrevista.

> Eu nunca acreditei que podia ter uma positiva a Matemática. Achava que era um caso perdido, que nem valia a pena tentar. Tinha ouvido tantas vezes que não sabia fazer nada, que dizia tudo errado, que acabei por achar que era melhor ficar calado. Também, nem precisava de tentar, podia passar sempre com nega [classificação de nível negativo] a Matemática. Até já nem gastava dinheiro no livro, dava bué da jeito para outras coisas... (V., E1, Dezembro 1997)

A primeira parte deste excerto refere-se ao antes de participar no projecto IC e mostra bem a representação social extremamente negativa que o V. tinha de si próprio, enquanto aluno de Matemática. Ele era "um caso perdido, nem valia a pena tentar" e nunca acreditou que podia ter uma classificação de nível positivo. Como afirma, "tinha ouvido tantas vezes que não sabia fazer nada, que dizia tudo errado, que acabei por achar que era melhor ficar calado". Este excerto ilustra como a não aceitação das formas naturais de pensar e fazer Matemática de alunos cuja L1 é o crioulo, que preferem estratégias de resolução por representação gráfica, raciocínios geométricos ou espaciais e abordagens globais dos problemas, podem destruir a auto-estima positiva e fomentar o insucesso académico e

escolar. Esta descrição recorda-nos o que salientou Strecht (2011), quando afirmava que

> Há palavras que ligam, que juntam, que reorganizam, aliviam e fazem pensar (...). E há palavras que atacam, cortam como lâminas ou estilhaços de vidro e afastam, induzem dor, desorganizam, paralisam e sobre elas só existe a vontade de fugir, ignorar, agir, destruindo. (Strecht, 2011, p. 118)

Aquilo que o V. tinha ouvido sobre os seus desempenhos matemáticos e sobre ele, como pessoa, eram palavras que atacavam, afastavam, induziam dor, desorganizavam e paralisavam, tanto que ele já nem sequer tentava participar nas aulas de Matemática. Eram palavras que ele tentava esquecer, mas recordava e que estavam, muitas delas, escritas nos relatórios que lhe diziam respeito. Por isso, não eram algo que não soubéssemos que tinha existido. Essas palavras tinham-lhe dado vontade de fugir, agindo até ser convidado a sair da aula, uma fuga para a frente, que correspondia a uma tentativa para parar com o sofrimento, que estar ali lhe causava. Por isso, essas palavras tinham transformado um aluno brilhante, num aluno calado, que preferia nem responder. Como afirma Reis (2009), "fugir do que se é, redunda num nada" (p. 131) e, ao serem impedidos de pensar e fazer Matemática das maneiras que lhes eram naturais, os alunos cuja L1 era o crioulo, sentiam-se impedidos de ser o que eram, sentindo-se rejeitados pela cultura dominante, como se, para aquelas pessoas, fossem "um nada". Por isso, anulavam-se, deixavam de tentar e só queriam que aquele tempo passasse e a aula acabasse, para saírem dali. Mas estes eram os mesmos alunos que tinham estado a trabalhar, concentrados, desde a primeira aula, que participavam nas discussões gerais, explicitando resoluções de tarefas matemáticas, o que ilustra como a operacionalização que se faz do currículo, os implícitos e as expectativas dos professores, configuram os desempenhos dos alunos e, até, as suas formas de agir e reagir, em aula, como salientam César (2009, 2013a, 2013b, 2014, 2017, 2024a, 2024b), César e seus colaboradores (2014) e César e Machado (2024a, 2024b). Mas, sem conhecer as capacidades e competências dos alunos, desde a primeira semana de aulas, sem usar os MPD (César, 2024b) para tomar decisões quanto à formação das primeiras díades, estas formas de operacionalização do

currículo não são possíveis. Isso realça a importância destes conceitos e formas de actuação serem discutidos na formação inicial e contínua de professores.

Como o V. era resiliente, habituado a ser criticado, dentro e fora da escola, bem como a ter de lutar por cada passo da sua vida, resolveu que, se podia passar com nível negativo a Matemática, nem valia a pena comprar o manual e podia usar o dinheiro para outros materiais, como os que usava em Educação Visual, onde se sentia apreciado e sabia que conseguia ter muito sucesso académico (Nível 5, o mais elevado). Assim, arranjou uma maneira de sobreviver no sistema educativo e de concluir o 9.º ano de escolaridade mesmo que, em Matemática, isso significasse bloquear as suas capacidades e competências, uma vez que estas não eram apreciadas pelos professores.

> Mas depois veio este 'stor que fazia tudo ao contrário... quer dizer... não ligava quando eu dizia que era um caso perdido e até parecia interessado nas cenas bué da estranhas que eu falava. Deixava-me pensar à minha maneira... eu até achava que aquilo não era Matemática, mas ele lá me ouvia todo interessado... e eu ficava numa confusão dos diabos. Afinal aquilo era Matemática ou não? Eu ía poder fazer assim nos testes? (V., E1, Dezembro 1997)

Este parágrafo mostra o depois, o que mudou quando começou a participar no projecto IC. Um professor/investigador que "fazia tudo ao contrário", ou seja, em vez de criticar as formas naturais de raciocínio dele, escutava-o muito interessado, e não ligava quando ele dizia que "era um caso perdido". O mais importante, é que "deixava-me pensar à minha maneira", como o V. realçou. Algo que deveria ser permitido a todos os alunos, mas que, muitas vezes, não é. Para Strecht (2011), estas são palavras essenciais para promover o desenvolvimento saudável, pois são as que "ligam, que juntam, que reorganizam, aliviam e fazem pensar" (p. 118), ou seja, permitem-lhe curar feridas que as palavras anteriores causaram, reorganizam a sua vida interior, ajudam-no a estabelecer relações pacíficas e reconfortantes com os colegas e fazem-no pensar, na vida passada, mas também num futuro, que pode ser diferente do que ele tinha imaginado. Permitir aos alunos que pensem segundo as suas formas naturais de abordagem dos problemas, de raciocínio, é aceitá-los como são. Sentir-se respeitado e admirado pelo

que se é, é um passo fundamental para que a pessoa consiga construir uma *Me-position* mais sólida, mas também mais tranquila. Aquilo que eu acho que sou é também configurado pelo que os outros acham de mim.

Contudo, esta mudança de estilo de professor, causava-lhe dúvidas, pois o V. não achava que o que ele fazia era Matemática e, por isso, "ficava numa confusão dos diabos", sem perceber bem se aquilo era Matemática e se ele podia usar aquelas estratégias de resolução nos testes que, para ele, eram as "verdadeiras" formas de avaliação, aquelas que ele conhecia dos anos lectivos anteriores, como esta frase pressupõe, implicitamente. Estas afirmações, ditas em Dezembro, quando o V. já tinha atingido Nível 4 nos testes de Novembro e de Dezembro, mostram bem como o início do ano lectivo foi desafiante para ele. Ele gostava mais de estar nas aulas, do clima de sala de aula calmo, agradável, em que todos estavam a trabalhar e ninguém era convidado a sair da aula. Em que nenhum dos alunos se sentia julgado negativamente ou ameaçado. Gostava de conseguir resolver as tarefas, de poder questionar o colega que trabalhava com ele ou o professor/investigador, quando tinha dúvidas, sem se sentir posto em causa, por ter outras formas de raciocínio e outras estratégias de resolução. Mas, apesar dos progressos, nas aulas, e das classificações elevadas nos instrumentos de avaliação e no final do ano lectivo, o V. levou vários anos até acreditar que era um excelente aluno a Matemática, como nos disse numa das entrevistas do *follow-up*.

> Levei muitos anos a acreditar que era mesmo muito bom aluno a Matemática. Apesar de ter tido Nível 5 [o mais elevado] no 9.º ano de escolaridade e 100% no exame, não me considerava muito bom aluno, quando fui para o 10.º ano. Ia mudar de professor, de turma, de avaliação, que passava a ser de 0 a 20... Achei que ía voltar a ter insucesso... Eram muitos anos de críticas e problemas, e só um de me ter sentido respeitado e valorizado. Por isso, achava o que acontecera naquele ano uma espécie de sonho, que ía acabar e voltar o insucesso e as críticas habituais. E estava preocupado. Eu tinha decidido continuar a estudar, mas... e se tivesse decidido mal? Se voltasse tudo ao que era dantes?
>
> Por isso, acreditar que era excelente a Matemática, foi só quando tive 20 valores no exame de 12.º ano, depois de também ter essa nota na escola [refere-se ao 3.º período]. Aí, foi quando me caíu a ficha: eu era melhor do que a maioria dos

> alunos, em Portugal. Não era só naquela escola, era no país todo. Quem diria!... Mas, nessa altura, já tinha acabado o secundário, estava à espera de saber a colocação na universidade, tinha de trabalhar naquelas férias, para juntar dinheiro para sobreviver depois, tinha de alugar um quarto... Tinha de tocar a minha vida para a frente... Havia tanta coisa para fazer, para resolver, que o sucesso nos exames me passou rapidamente ao lado... (V., E6, Julho 2002)

Este excerto é curioso, porque surge no final do primeiro ano na universidade, ou seja, quando ele já conseguiu entrar em Arquitectura, um dos cursos com uma média de entrada mais elevada, naquele ano, em Portugal. As dúvidas do V., quanto ao nível que conseguia atingir em Matemática, mostram como os anos lectivos anteriores à sua participação no projecto IC deixaram marcas negativas. As tais palavras que magoam e destroem, como referia Strecht (2011), fizeram-no duvidar de si, enquanto aluno, mesmo depois de conseguir excelentes classificações. Durante o 9.º ano de escolaridade, ele tinha deixado de ter Nível 1, para ter Nível 4 (1.º período) e, depois, Nível 5. Mas isso não o convenceu de ser um óptimo aluno. Achou que era sorte, porque tinha tido aquele professor, "que gostava das cenas que ele desenhava" (V., E2, Junho de 1998). Mas, depois, tudo voltaria ao mesmo e, no 10.º ano de escolaridade, mais exigente, com outro professor, com classificações numa escala de 0 a 20 valores, ia ter nível negativo novamente. O sonho ía acabar e ía voltar ao habitual: ser criticado, não saber resolver as tarefas. Era como se aquele ano com sucesso académico e escolar tivesse sido só uma ilusão, como se os seus progressos não fossem consistentes, estáveis no tempo, susceptíveis de transitarem para outros espaços e tempos.

Os impactes da participação no projecto IC levaram-no a mudar a trajectória de participação ao longo da vida e a inscrever-se no ensino secundário, em vez de ir trabalhar, como tinha previsto e afirmado no Q1, na E1 e em diversas conversas informais. Mas ele duvidava da justeza dessa decisão e só muitos anos mais tarde nos disse (e mantém, em diversas conversas informais posteriores ao final do *follow-up*), que agora sabe que tomou a decisão certa "porque a vida lhe mostrou isso, com a maneira como decorreu e com a maneira como se sente realizado, pessoal e profissionalmente" (V., E13, Julho 2009).

Apesar das dúvidas do V. quanto à justeza da decisão que tinha tomado, no ensino secundário as classificações continuaram a ser elevadas. No 10.º ano de escolaridade, que começou com quatro meses em que estudaram Geometria, como constava do currículo prescrito, ele notava que os colegas tinham dificuldade em visualizar. Por isso, ajudava-os, dentro e fora das aulas, quando eles tinham dúvidas. Obteve classificações entre 19 e 20 em todas as avaliações, algo que manteve no 11.º e 12.º anos de escolaridade, tanto a Matemática como a Geometria Descritiva. Mas, mesmo isso, não o convenceu de ser muito bom aluno. Foi necessário um uma prova nacional (vulgo exame) e ver o que se escreveu sobre esses resultados, nos jornais, para perceber que era mesmo excepcional, que a classificação dele era rara, em todo o país.

Porém, como também afirma, acabar o 12.º ano de escolaridade com classificações muito elevadas, não significou que teria umas férias descansadas, ou grandes elogios em casa. Aliás, a família não concordara com a inscrição no ensino secundário e, muito menos, na universidade, que consideravam ser "para quem é rico e não precisa de ganhar dinheiro" (V., E5, Julho 2001). Mais uma vez, tinha alterado a trajectória da participação ao longo da vida e decidido concorrer a Arquitectura, porque lhe agradava o curso e percebeu que a média obtida lhe permitiria entrar. Portanto, para ele, que vinha de um meio economicamente desfavorecido e de uma família que não valorizava estudos longos, entrar no ensino superior significava trabalhar no verão, ter de alugar um quarto, tentar ter condições financeiras para poder frequentar o curso universitário. Algo que observámos frequentemente em alunos do bairro, que decidiam tirar um curso no ensino superior, ou mesmo noutras escolas, onde havia alunos sócio-economicamente desfavorecidos. Por isso, como revela, "tinha de tocar a vida para a frente", ou seja, pouco podia saborear o sucesso do final do ensino secundário, pois precisava de se preparar para a luta seguinte. Como nos confidenciou, "a mim, nada me é dado de graça... ou quase nada... porque o emprego que eu consegui, no final do 12.º ano, esse, foi o meu totoloto... e aceitaram-me logo..." (V., E9, Julho 2005).

Nas aulas seguintes, enquanto ainda exploravam as equações do 1.º grau a uma incógnita, o professor/investigador continuou a propor tarefas cuja natureza permitisse usarem diferentes tipos de abordagem, raciocínio e estratégias de

resolução. Isto significava que nem todos os alunos usavam equações para as resolver. Mas todos estavam a trabalhar, um critério fundamental para ele, sobretudo nesta turma, em que apenas quatro alunas tinham obtido uma classificação positiva a Matemática, em anos lectivos anteriores. Para além disso, ele acreditava que, na discussão geral, explorando várias estratégias de resolução alternativas, os alunos acabariam por aprender as que eram diferentes das suas formas naturais de fazer Matemática, pois o trabalho em díade e a discussão geral fomentariam que trabalhassem na sua ZDP (César, 2009; Vygotsky, 1934/1962), favorecendo o amadurecimento de capacidades e competências que faziam parte do desenvolvimento potencial, bem como promovendo a aprendizagem.

A interacção que vamos analisar, já foi usada por César (2003, 2009, 2024a), mas dando origem a outro tipo de interpretações. Uma versão mais curta desta interacção, foi também citada por César e Machado (2024a). Porém, ao não incluir a parte da intervenção do professor/investigador, aquela interpretação não permite ilustrar alguns dos aspectos que aqui consideramos, nomeadamente os que dizem respeito à formação de professores. Para além disso, como esta tarefa também foi utilizada na turma da Tatiana e do Tomás, há conexões interessantes que podemos fazer e que não existiram nas análises anteriores, que não incluíam esta última díade.

> Problema – Um merceeiro vendeu metade de um queijo, depois um quarto e, finalmente, uma sexta parte. Verificou então que ainda lhe restavam 125 g. Quantos quilos pesava o queijo?
>
> [O V. Começa a desenhar uma circunferência e depois pára, enquanto lê novamente o problema.]
> 1. M. – O que é isso?
> 2. V. – É um queijo.
> 3. M. – Um queijo?... Para quê?
> 4. V. – Agora vou desenhar o que ele vendeu...
> 5. M. – Mas eu acho que isto se faz com contas...
> 6. V. – Eu não sei fazer com contas... Por isso vou ver se dá assim...
> 7. M. – Então faz o teu que eu faço o meu e já explicamos.
> (M. e V., O, registada em áudio, Setembro 1997)

Nesta aula, embora ainda sentados cada um na sua ponta da mesa, o V. e a M. já se cumprimentaram, antes de começarem a pôr os materiais em cima da mesa. Assim que o professor/investigador distribuiu a ficha de trabalho, começaram a ler e a resolvê-la. Porém, optaram por estratégias de resolução diferentes, como era habitual em alunos cujas L1 eram o português e o crioulo. Este enunciado já não tinha qualquer representação gráfica, pelo que a M. achou que tinha "começado a Matemática a sério" (M., O, registada em áudio, Setembro 1997), como comentou baixinho, quando receberam a ficha de trabalho. Por isso, considerou que as estratégias de resolução por representação gráfica não faziam qualquer sentido (Falas 3 e 5) e negou-se a seguir a estratégia de resolução do V. (Fala 7). Mas o V. tinha percebido que as estratégias de resolução que ele usava eram apreciadas pelo professor/investigador, pelo que decidiu continuar a sua resolução (Fala 6). Assim, como afirmam Zittoun e Grossen (2024), "uma situação de sala de aula relativa a um determinado objeto de conhecimento está em diálogo com outras situações e essas situações não são iguais para todos os atores" (p. 97), nem sequer para todos os alunos, como observamos neste início de processo interactivo. Como estas autoras também sublinham, o diálogo não existe apenas entre os pares de cada díade, também são chamadas pessoas que não participam nele directamente, ou seja, terceiros ausentes. O V. decidiu tentar aquela estratégia de resolução, porque o professor/investigador agiu de determinada forma nas aulas anteriores. Mostra como uma abordagem dialógica explica a relação temporal entre diálogos passados, presentes e com antecipação dos futuros, pois ele tem a expectativa de que o professor/investigador também valorize aquela estratégia de resolução, quando for a discussão geral, em grande grupo (turma).

Neste início do processo interactivo nota-se que a M. volta a querer assumir a liderança, algo que apenas era habitual, em díades mistas, quanto ao género, se o elemento feminino tivesse um estatuto de muito melhor aluno, devido às classificações académicas obtidas. Esta constatação, focada por César (1994) e também observada na meta-análise do *corpus* empírico completo do projecto IC, mostra como a discriminação negativa de género afeta a capacidade de liderança. Enquanto os rapazes lideram, mesmo quando têm desempenhos matemáticos que não são bem-sucedidos e classificações que não são de nível positivo, nas

meninas isso não acontece. As marcas da liderança da M. são várias: (1) é ela quem inicia a interacção (Fala 1); (2) é ela quem faz as perguntas (Falas 1 e 3); (3) é ela quem critica a estratégia de resolução do V., que considera inadequada (Fala 5); e, por último, (4) é ela quem toma a decisão de trabalharem individualmente, só explicando no final o que tinham feito (Fala 7). Assim, ela não propõe uma completa ruptura do contrato didáctico, pois existe a previsão de explicação final, mas também não o cumpre integralmente, pois começam por trabalhar individualmente.

O V., que nas aulas anteriores tinha conseguido resolver as tarefas e também tinha explicado uma delas no quadro, em que tinha usado uma estratégia de simplificação, por manipulação de variáveis e, depois, uma equação (Problema 6, do episódio interactivo anterior), estava empenhado em resolver a tarefa proposta pelo professor/investigador. Mas precisava de partir de raciocínios espaciais ou geométricos e estratégias de resolução por representação gráfica, para conseguir pensar, mesmo se, depois, conseguia utilizar estratégias de resolução algébricas. Por isso, começa logo por desenhar uma circunferência (Fala 2), que representava o queijo, e preparava-se para marcar o que tinha sido vendido (Fala 4). Ele já tinha levado algum material: caderno, lápis, borracha e canetas. Mas não tinha compasso ou transferidor, nem pediu os da M., que estavam em cima da mesa. Apesar disso, a circunferência que ele desenhou era extremamente rigorosa, tal como os sectores circulares posteriores, quando marcou o que tinha sido vendido. Assim, voltava a mostrar um raciocínio geométrico e uma capacidade de visualização muito desenvolvidos, assim como uma motricidade fina apurada.

Depois deste primeiro episódio interactivo, cada um trabalha individualmente, até a M. reparar, espantada, que o V. já terminou e está com um grande sorriso, o que indica que está feliz com o seu desempenho. Isso deixa-a incomodada, pois ela tem um estatuto de excelente aluna a Matemática e ainda não conseguiu concluir a resolução. Por isso, decide assumir novamente a liderança e perguntar ao V. como resolveu a tarefa (Fala 8).

Pela transcrição da interacção, bem como pela análise do que tinham escrito nas folhas de rascunho, quando trabalharam individualmente, constatou-se que cada um recorreu à sua forma natural de resolver o problema. O V. usa uma

abordagem global, um raciocínio geométrico e uma estratégia de resolução por representação gráfica associada depois, brevemente, a uma estratégia aritmética. Isso corresponde ao que é, geralmente, preferido pelos alunos cuja L1 é o crioulo. A M. recorre a uma abordagem passo-a-passo, um raciocínio analítico e uma estratégia aritmética, habituais em alunos cuja L1 é o português.

> 8. M. – Como é a tua?
> 9. V. – Fiz o queijo, depois dividi em 6 partes iguais... que era para ser mais fácil... Percebes?
> 10. M. – Percebo mais ou menos... percebo o que fizeste, mas ainda não percebi porque dividiste o queijo em 6 partes e não em 2... primeiro ele vende metade...
> 11. V. – Eu sei... mas eu tinha de saber marcar metade, um quarto e um sexto... metade e um quarto é fácil... o mais difícil é um sexto, portanto comecei por aí... se não depois não sabia como havia de fazer, quando já tivesse riscado a metade e o quarto já não sabia ver qual era um sexto...
> 12. M. – O quê?
> 13. V. – Faz um círculo! [A M. desenha o círculo]
> 14. V. – Agora, risca metade, que é o que vendeste. [A M. faz o que ele lhe diz]
> 15. V. – Agora risca mais um quarto, que é o outro bocado que vendeste. [Ela faz]
> 16. V. – Agora risca um sexto, que é o terceiro bocado que vendeste. [A M. pára, com o lápis na mão e diz]
> 17. M. – Ah! Já percebi! Assim é muito difícil... faz lá o teu! Deve ser melhor.
> (M. e V., O, registada em áudio, Setembro 1997)

O V. aceita que seja a M. a liderar e responde-lhe que desenhou o queijo e, depois, o dividiu em seis partes, para ser mais fácil (Fala 9). Sabemos que o V. tem um raciocínio geométrico particularmente desenvolvido e usa uma abordagem global, ou seja, imagina logo o que é marcar todos os bocados vendidos. Daí, ele afirmar que, se o deixarem "ver" a Matemática, ele consegue resolver as tarefas. Por isso, ele percebe imediatamente que, se não dividir o queijo em seis partes, para traçar primeiro $\frac{1}{6}$ e, depois, marcar metade e um quarto, já não consegue traçar rigorosamente $\frac{1}{6}$, como diz à M. (Fala 11). Mas esta capacidade de

visualização não é partilhada pela M. e ele percebe, pela cara dela, contrariada, que ela não está a acompanhar o raciocínio dele (Fala 9). A M. confirma que só percebe "mais ou menos", pois acha que ele devia seguir a ordem do enunciado (abordagem passo-a-passo, típica de quem tem o português como L1), em vez de começar por dividir o queijo em seis partes (Fala 10). Como a explicação do V. (Fala 11) não surte o efeito desejado (Fala 12), ele resolve mudar a forma de actuação e confrontá-la, de forma pragmática, com a dificuldade que ele identificou logo, mesmo antes de começar a desenhar o que fora vendido (Falas 13 a 16).

Curiosamente, o V. assume claramente a liderança e dá ordens à M. (Falas 13 a 16), usando o imperativo (faz, risca). O que é espantoso é que a M., que queria sempre liderar e considera as estratégias de resolução do V. disparatadas, obedece e faz tudo o que ele indica. Portanto, aqui, inverteram-se as posições: o V. lidera e actua como par mais competente (César, 2009; Vygotsky, 1934/1962). Assim, começa a existir uma alternância entre quem é o par mais competente da díade, algo essencial quando os alunos trabalham colaborativamente e de forma dialógica, na sua ZDP. Como o V. previra, marcar metade e um quarto foi fácil (Falas 14 e 15) e a M. nem hesitou. Mas quando tenta marcar $\frac{1}{6}$, fica com o lápis no ar, sem saber o que fazer, como assume depois (Fala 17). Mas, apesar de reconhecer que a maneira dele "deve ser melhor" (Fala 17), a desconfiança mantém-se lá, ilustrada pelo verbo usado: "deve", não é melhor. Para a M., em Matemática, usavam-se estratégias de resolução aritméticas ou algébricas, pois só essas eram mesmo Matemática. Logo, para ela, eram as únicas legítimas. Portanto, o que o V. fez, apenas aparenta ser melhor, ou seja, continua a haver uma carga negativa implícita na frase dela, que deprecia as formas naturais de ele pensar e fazer Matemática. Assim, a M. repetia o que tinha visto fazer nos anos lectivos anteriores: não aceitar este tipo de resoluções, não as valorizar e descredibilizar quem a elas recorria.

> [O V. desenha o queijo outra vez, divide-o em seis partes, traceja metade, mais um quarto e depois um sexto. A M. segue atentamente o que ele faz e vai dizendo os números em voz alta. Depois, ele diz]
> 18. V. – Vês o que não está tracejado?

19. M. – Sim.

20. V. – Eu acho que é metade de um sexto... por isso é $\frac{1}{12}$. Se $\frac{1}{12}$ é 125 g, então o queijo todo é $125\ \text{g} \times 12$, que dá 1500 g [Tinha feito a conta na máquina de calcular da M.]. Isso é 1.5 kg.

21. M. – Mas a mim não me deu isso!

(V. e M., O, registada em áudio, Setembro 1997)

O V. volta a desenhar o queijo, divide-o em seis partes, marca um sexto, metade e um quarto. Faz tudo isto muito rapidamente e com um rigor, em termos geométricos, que é espantoso para a investigadora do projecto IC, que tenta registar numa folha, por escrito as representações gráficas que vão sendo feitas. A dela e a da M. estão bastante tortas, muito pouco rigorosas. As do V. parecem ter sido desenhadas com compasso e transferidor. O traçado das linhas é perfeito, sem hesitações, percebendo-se que ele está habituado a desenhar e que a prática, associada a um raciocínio geométrico muito desenvolvido, o fazem ser muito eficiente e rigoroso.

Para além de marcar o que foi vendido, ao olhar para o que não está tracejado, o V. apercebe-se imediatamente que é metade de $\frac{1}{6}$ (Fala 20). Numa conversa informal, já no intervalo, perguntámos-lhe como tinha percebido que era metade e ele respondeu: "Olhando! (...) Eu só consigo ver a Matemática. Percebi que a parte que não estava traçada era como se eu tivesse dividido o queijo em 12 partes e não em seis" (V., O, registada pela investigadora, Setembro 1997). Portanto, ele não usa um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética. Prefere um raciocínio geométrico e uma estratégia de resolução por representação gráfica, como a maioria dos alunos cuja L1 é o crioulo. A única altura em que usa uma estratégia de resolução aritmética, muito breve, é quando recorre à calculadora para multiplicar 125 g por 12 e obtém 1500 g. Mas esta é uma mera estratégia auxiliar, para realizar um cálculo final. Não é esta estratégia de resolução final que configura a resolução do problema, é a estratégia de resolução por representação gráfica, que corresponde à sua forma natural de o resolver.

Até ao momento em que ele diz o peso do queijo, a M. estava a seguir a resolução dele com um ar interessado. Porém, quando se apercebe de que o

resultado dele é diferente do dela, afirma, num tom perentório, que ela não obteve esse resultado (Fala 21). O tom dela indicava alguma segurança – afinal, era ela que obtinha Nível 5 a Matemática – mas também algumas dúvidas, que claramente não lhe agradavam. Ele tinha sido mais rápido, explicitava o que tinha feito com enorme segurança e clareza, e isso poderia indicar que a resolução dela não tinha sido bem-sucedida. Como nos disse mais tarde, na primeira entrevista, "ter de aceitar que um aluno de Nível 1 conseguia resolver tarefas que eu não era capaz de resolver, custou a engolir" (M., E1, Dezembro 1997). Para alguém altamente competitiva, habituada a ser uma das melhores da turma em Matemática, podemos imaginar como este novo contrato didáctico foi social e emocionalmente desafiador, sobretudo enquanto ela não estabeleceu uma relação de amizade com o V., o que veio a acontecer, mais tarde.

Como ambos reconheciam que estratégias de resolução diferentes, se fossem bem-sucedidas, permitiam obter o mesmo resultado, o V. perguntou-lhe como é que ela tinha resolvido o problema (Fala 22), respeitando o contrato didáctico, que explicitava que ambos tinham de ser capazes de explicar a estratégia de resolução do outro. Esta foi mais uma frustração com a qual a M. foi confrontada nesta aula: (1) O V. tinha terminado primeiro e ela nem conseguira terminar a resolução; (2) ele conseguia explicar a sua resolução com imensa clareza e ela não sabia continuar a dela; e (3) a continuação da interacção iria mostrar-lhe que a resolução dela não tinha sido bem-sucedida, como o V. lhe demonstra, desenhando (Fala 24). A M. tinha dificuldade em lidar com a frustração, sobretudo quando esta era associada ao V. ter mais sucesso do que ela num desempenho matemático. Daí que a única frase com uma expressão menos correcta (" 'Tás parvo!"), seja proferida por ela (Fala 25) que era tida como uma aluna com um comportamento exemplar, segundo os relatórios dos professores de anos lectivos anteriores.

Como a M. preferia um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética, resolveu adicionar as partes vendidas pela ordem indicada no texto (abordagem passo-a-passo). Porém, ao adicionar as fracções, não as reduziu ao mesmo denominador, não sendo bem-sucedida quanto ao resultado obtido (Fala 23). Isso fez com que sentisse dificuldades, não conseguisse continuar e não terminasse a resolução.

22. V. – Como é que fizeste?
23. M. – Com contas. Fiz $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ e deu-me $\frac{3}{12}$. Isso foi o que ele vendeu. Um queijo é $\frac{12}{12}$. Portanto tirei $\frac{3}{12}$ a $\frac{12}{12}$ e deu-me $\frac{9}{12}$, que são as 125 g... mas agora não sei continuar.
24. V. – Eu não percebo as tuas contas porque não sei Matemática... mas tu tens isso mal... porque dizes que ele vendeu $\frac{3}{12}$ e isso é um quarto do queijo...
25. M. – 'Tás parvo! Não é nada... É a soma daquilo tudo...
26. V. – Isso é o que tu querias que fosse, mas não é o que a tua conta te deu... Vê... [Desenha outro queijo, divide-o em 12 partes e marca 3. Depois, olha para a M.]
27. M. – Que trapalhada! Não percebo porquê... as contas também deviam dar… (V. e M., O, registada em áudio, Setembro 1997)

O momento em que o V. lhe tenta demonstrar, graficamente, que o que ela fez está mal, é muito interessante. Ele tenta ser muito cuidadoso para não a atacar, nem ofender. Para além disso, ele acha mesmo que ela é que sabe Matemática. Como vimos nos excertos da primeira entrevista, que já analisámos, ele não achava que desenhar fosse Matemática. Por isso, na primeira parte da Fala 24, reconhece que não percebe as contas dela, porque não sabe Matemática, ou seja, desvaloriza-se a si próprio, enquanto aluno de Matemática. Afirma que, através de uma estratégia aritmética, não consegue identificar o que está mal na resolução dela, pois não sabe operar com fracções. Mas sabia visualizar muito bem e tinha a certeza de que a parte que sobrara por vender era $\frac{1}{12}$ e também sabia que $\frac{3}{12}$ era um quarto do queijo (Fala 24). Mais uma vez, ele não sabe simplificar aquela fracção, transformando-a em fracção irredutível. Mas sabe, visualmente, que se dividir o queijo em 12 bocados e tomar três, isso é um quarto do queijo. Este exemplo ilustra, de forma paradigmática, como não deixar os alunos utilizarem as suas formas naturais de raciocínio, os pode impedir de aprenderem Matemática, como realçaram César (2024b) e César e Machado (2024a, 2024b).

Apesar de a M. lhe chamar parvo (Fala 25), o V. decide ignorar isso e mostrar-lhe, graficamente, que $\frac{3}{12}$ são um quarto do queijo (Fala 26). Que ele lhe conseguisse provar que tinha razão, desenhando, seria de esperar. O que nos

espantou, quando transcrevemos a gravação em áudio, foi o tom e a subtileza com que ele lhe responde, depois de ela lhe chamar parvo: "Isso é o que tu querias que fosse, mas não é o que a tua conta te deu" (Fala 26). Depois de um ataque pessoal, ser capaz de reagir assim, mostra muita maturidade emocional, um vocabulário rico e um domínio da sintaxe que são raros, nestas idades. A forma subtil como distingue o "querias que fosse" (desejo) do que "é" (realidade), mostra muita capacidade de análise da situação e um saber lidar com a frustração dela que, mais uma vez, não correspondia ao que diziam os relatórios sobre ele. Mas esta formulação acalma a M. pois, na fala seguinte (Fala 27), ela apenas reconhece que aquilo é uma trapalhada e que "as contas também deviam dar...", já não o atacando.

Meijers e Hermans (2018b), ao explicarem como interagem as diferentes *I-positions* que caracterizam o *dialogical self*, realçam que reagimos de maneiras diferentes perante alguém com quem competimos, como a M. fazia em relação ao V., ou com alguém de quem gostamos. Para estes autores, cada *I-position* é um acto espacial-relacional, em que cada um se posiciona face ao outro e a si mesmo, como vimos nesta interacção entre o V. e a M., em que ela mostra a sua força e ele tenta não deixar escalar os conflitos.

> Uma *I-position* concebida como um acto espacial-relacional existe no contexto das posições de outras pessoas (por exemplo, eu me posiciono como forte, em relação a um outro competitivo, e como afectuoso, em relação a um outro de quem gosto). Como ato espacial, posicionar-se é colocar-se frente a frente com outra pessoa e, ao mesmo tempo, em relação a si mesmo, no espaço metafórico do *self*. Como um processo espacial-relacional, representa uma postura em relação a alguém, seja física ou virtualmente, e dirige-se, ao outro ou a si mesmo, através de orientações e comunicações verbais ou não-verbais." (Meijers & Hermans, 2018b, p. 8, itálicos acrescentados na tradução)

No final do episódio interactivo anterior, existia um impasse e teria sido interessante ver como eles o ultrapassavam ou o que fariam, se não conseguissem solucioná-lo. Porém, o professor/investigador, que não tinha ouvido a interacção e se deslocava pela sala, vendo o que cada díade estava a fazer, chegou perto

deles nesse momento. A aproximação da autoridade máxima, segundo a M., fez com que ela retomasse a liderança e tentasse que o professor/investigador legitimasse a sua estratégia de resolução, desvalorizando a do V.: "Ele diz que tem razão, e quando desenha parece que tem, mas eu acho que isto é Matemática, devia ser com contas!..." (Fala 29). A formulação é muito curiosa: quando desenha, parece que ele tem razão. Parece, mas não tem, porque "a Matemática se faz com contas" e, por isso, é quem usa estratégias de resolução aritmética que é bem-sucedido. Isto mostra que, anos e anos de um contrato didáctico dito tradicional (César, 2003, 2009), fez os alunos como a M. sentirem as suas estratégias de resolução preferenciais aceites, enquanto as outras eram rejeitadas. Se, neste momento, o professor/investigador tivesse legitimado esta opinião dela, perdia-se a oportunidade de criar um espaço de pensamento (Perret-Clermont, 2004) e uma comunidade de aprendizagem (Civil, 2007), algo essencial para promover uma educação intercultural e inclusiva, o trabalho colaborativo e dialógico, bem como para distribuir o poder. Em vez disso, todas as falas do professor/investigador reforçam as regras do contrato didáctico inovador, que pretende negociar com os alunos, iluminando como uma formação inicial de professores consistente e prática contribui para uma educação intercultural e inclusiva.

28. Prof. – Então, e aqui?
29. M. – Ele diz que tem razão, e quando desenha parece que tem, mas eu acho que isto é Matemática, devia ser com contas!... [O V. explica como ele fez]
30. Prof. – Percebeste como ele fez?
31. M. – Sim.
32. Prof. – E tu? Percebeste o que ela fez?

(Professor/investigador e M., O, registada em áudio, Setembro 1997)

A primeira intervenção do professor/investigador (Fala 28) é uma pergunta aberta, que pretende saber o que eles estiveram a fazer e mostra o interesse dele pelo trabalho de cada aluno. Quando a M. tenta que ele legitime a estratégia de resolução dela (Fala 29), o professor/investigador não diz nada e só olha para o V. com um ar curioso, levando-o a explicar a sua estratégia de resolução. Quando ele termina, o professor/investigador vira-se para a M. e pergunta-lhe se percebeu

o que ele fez (Fala 30), ao que ela responde afirmativamente (Fala 31). Depois, vira-se para o V. e faz-lhe a mesma pergunta: se ele percebeu o que ela fez (Fala 32). Portanto, toda a actuação do professor/investigador é uma maneira de reforçar as regras do contrato didáctico inovador, ao qual pretende que os alunos adiram: (1) interessa-se por saber o que eles fizeram, quais as abordagens, raciocínios e estratégias de resolução que usaram (Fala 28); (2) implicitamente, diz-lhes que todas as estratégias de resolução são válidas, pois não faz comentários avaliativos sobre nenhuma delas e interessa-se por todas; (3) leva-os a explicitarem a estratégia de resolução que usaram, olhando para cada um deles com um ar curioso; e (4) reforça que cada um deles tem de conhecer e perceber a abordagem, raciocínio e estratégia de resolução do outro (Falas 30 e 32). Este é um exemplo claro de como as formas de agir e reagir dos professores influenciam o clima da aula, o modo com agem e reagem os alunos (ex: com mais ou menos respeito pelos colegas e pela diversidade de estratégias de resolução), configurando os desempenhos matemáticos. Como afirmava Bishop (2001), há valores implícitos e, por vezes, explícitos, na forma como se actua nas aulas de Matemática. Para um professor estagiário reagir assim, é preciso que tenha tido uma formação inicial muito sólida, em que fossem discutidos casos reais, alguns deles gravados em vídeo, formas de actuação em aula em diferentes situações, simulações através de *role-playing*, salientando a importância de estar atento ao que se diz e a como se comunica com os alunos, algo também analisado e discutido quando íam assistir a aulas de outros professores. A forma de agir deste professor/investigador tornou-se um modelo para os alunos, que acabavam por falar com mais respeito uns com os outros, por escutar os colegas de forma interessada, por ficar satisfeitos quando alguém conseguia elaborar uma resolução interessante.

> 33. V. – Eu percebo que as contas dela não estão certas... desenhei aqui e aquilo só dá $\frac{1}{4}$... mas acho que também devia poder ser assim... mas eu não sei nada disto, não sei fazer assim...
> 34. Prof. – Então, M., como é que pensaste?
> 35. M. – Que tinha de somar tudo o que ele vendeu para ver quanto dava...

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$

36. V. – Até aí eu estou de acordo.

37. M. – E deu-me $\frac{3}{12}$ ...

38. Prof. – $\frac{3}{12}$?

39. M. – Sim... 1 + 1 + 1 = 3 e 2 + 4 + 6 = 12

40. Prof. – E como é que se somam fracções? [Silêncio]

41. Prof. – O que é preciso fazer para depois ser possível somar as fracções?

42. M. – [A medo] Reduzir ao mesmo número aqui? [Aponta para os denominadores]

43. Prof. – Pois é!

44. M. – Ah, então já sei!... É o 6... Não, é o 12. $\frac{6}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$

45. V. – Pois... então sempre te sobrou $\frac{1}{12}$, como a mim! [Está visivelmente feliz]

46. M. – Sim... depois é fazer as mesmas contas que tu fizeste.

47. V. – Afinal, desta vez era eu que tinha certo! [Vitorioso] Acho que nunca tinha acertado nada em Matemática... sozinho.

(V., Professor/investigador e M., O, registada em áudio, Setembro 1997)

O V. explica ao professor/investigador como se apercebeu de que os cálculos da M. não estavam bem (Fala 33), mas continua a dizer que, como não sabe usar estratégias de resolução aritmética, não sabe Matemática. Isso revela como foram castradores os comentários que ouviu, em anos lectivos anteriores. Vemos que o professor/investigador não usa comentários avaliativos, nem positivos nem negativos, sobre os desempenhos deles, ou sobre o estilo de alunos que eles são. Mas os alunos ainda o fazem, fruto de muitos anos a serem julgados e avaliados, através dos comentários dos professores e dos colegas, em aula. Esta foi uma mudança que levou meses a estar terminada e que foi alvo de diversos avanços e recuos, até ter sido assumida, pelos alunos, de uma forma consistente. Mas, como o professor/investigador pretende que eles explicitem o que pensaram e as resoluções que elaboraram, sem julgamentos de valor, pergunta à M. como pensou (Fala 34), levando-a a dizer que somou as partes que tinham sido vendidas (Fala 35). O V., que já tinha explicitado a estratégia de resolução dele, podia ter-se

distraído e não estar atento à explicação da colega. Mas não é isso que se observa, pois, na Fala 36, ele afirma que, até ali, está de acordo e, depois, na Fala 45, reconhece que à M. também lhe sobrou o mesmo que a ele, algo que ela ainda não verbalizara. Portanto, ele está muito atento à interacção social entre o professor/investigador e a M., até porque está interessado em aprender aquela estratégia de resolução. O interesse do V. por aprender outras estratégias de resolução manifestou-se desde a discussão geral do IACC, como se pode comprovar nos processos interactivos entre ele e a M. que já analisámos, na primeira ficha de trabalho e neste problema.

Na Fala 37, a seguinte, a M. indica que a adição das fracções (o que tinha sido vendido) lhe deu $\frac{3}{12}$. Mais uma vez, o professor/investigador reage de acordo com os princípios da educação intercultural e inclusiva, bem como daquele contrato didáctico: apesar da M. ser uma aluna de Nível 5, não há qualquer comentário avaliativo em relação ao resultado dela ao adicionar as fracções. Assim, apenas lhe pergunta $\frac{3}{12}$? (Fala 38), procurando saber como obteve aquele resultado. Isso fá-la explicitar que adicionou todos os numeradores e, depois, todos os denominadores (Fala 39). Perante esta resposta, o professor/investigador pergunta-lhe: E como se somam fracções? (Fala 40), dizendo-lhe, implicitamente, que algo não está bem na resolução dela. A esta pergunta segue-se um silêncio e o professor/investigador poderia ter dado ele próprio a resposta. Mas, como pretende desenvolver a aprendizagem e a autonomia, opta por fazer outra pergunta, com um pouco mais de informação: O que é preciso fazer para depois ser possível somar as fracções? (Fala 41). Implicitamente, reformular a questão, em vez de responder, indica aos alunos que são eles que têm de encontrar as respostas. Mais importante ainda, revela que o professor/investigador acredita que são capazes de o fazer. Esta forma de actuação é essencial quando se pretende promover o trabalho colaborativo e dialógico, em que os alunos estão empenhados em melhorar os desempenhos, bem como um clima de sala de aula pacífico e securizante, em que todos se respeitem, em que se promova uma educação intercultural e inclusiva. O professor/investigador era estagiário, mas teve uma actuação muito adequada, que revela uma forte consciência epistemológica e muitas competências pedagógicas (César, 2008, 2010; César et al., 2014). Isto mostra como é

importante a formação inicial e contínua de professores, algo que César (2000, 2012b, 2024a, 2024b), César e seus colaboradores (2014) e César e Machado (2024a, 2024b, 2025) realçaram de forma inequívoca, ao destacar a sua relevância para fomentar uma educação intercultural e inclusiva. Também Leite e Sousa-Pereira (2023) consideram que a formação de professores é essencial para estes agirem como decisores, a forma mais frutuosa de operacionalizar o currículo prescrito.

A calma e inexistência de julgamentos, por parte do professor/investigador, levou a M. a recordar-se de que era preciso reduzir as fracções ao mesmo denominador (Falas 42 e 44), obtendo o mesmo resultado que o V. tinha explicitado. Este, que tinha estado muito atento a toda a interacção entre a M. e o professor/investigador, ficou visivelmente satisfeito quando viu aquele resultado (Fala 45) e constatar que ela concordava que, depois, era fazer as contas que ele já tinha feito (Fala 46). O impacto deste episódio interactivo no V. está bem patente na Fala 47, quando ele afirma, satisfeito: "Afinal, desta vez era eu que tinha certo! [Vitorioso] Acho que nunca tinha acertado nada em Matemática... sozinho.", aumentando a confiança nas suas capacidades e competências, levando-o a ter vontade de investir mais nas aprendizagens matemáticas.

Mas este contrato didáctico não era apenas adequado para o V. e para os outros alunos que tinham insucesso académico em Matemática. Se assim fosse, não seria pedagogicamente legítimo usá-lo. Ele também contribuíu para que a M. ultrapassasse as suas dificuldades e para que ela desenvolvesse raciocínios espaciais e geométricos, aprendesse a utilizar estratégias de resolução por representação gráfica e estratégias de simplificação, por manipulação de variáveis, ou desenvolvesse a intuição matemática e o sentido crítico. Ela reconhece isso mesmo, na entrevista (E2) do final do 9.º ano de escolaridade.

> Outro 'stor, naquela aula em que somei mal as fracções, tinha-me criticado, por ter 5 e fazer um erro daqueles, tão básico. Tenho a certeza disso e ainda hoje lhe estou grata pela calma dele, por não me ter humilhado. Ele só fez perguntas, até eu perceber o erro. Mas nem o tom de voz, nem o que disse, eram uma crítica, um julgamento negativo. Foi aí que eu percebi que aquele professor diferente, também me convinha a mim porque, quando eu errava, não gostava de ser

> gozada ou criticada. Eu também aprendia melhor naquele clima tranquilo, mas exigente. Porque ele não me criticou, mas também não me deu a resposta, obrigou-me a pensar, foi fazendo mais perguntas... embora eu só tenha sido capaz de reconhecer isso como exigência mais tarde, quando já tinha mais capacidade de observação e de análise, mais sentido crítico... (M., E2, Junho 1998)

A M. reconhece algo fundamental: até os alunos com classificações muito elevadas precisam de ser respeitados, quando se enganam, e não gostam de se sentir humilhados. Por isso, ela, que estava convencida que aquele estilo de aulas só convinha aos que tinham dificuldades e não sabiam Matemática, podendo mesmo prejudicar alunos de topo, reconhece que, afinal, eram ajustadas para todos. Para além disso, analisando este episódio, ela percebeu algo essencial: o professor era calmo, tranquilo, mas também exigente, pois não lhe dava as respostas. Fazia perguntas até ela conseguir fornecer a resposta. Esta exigência, que faz parte da maneira de trabalhar no projecto IC, é subtil e implícita. Por isso, só quando os alunos se tornam mais observadores e críticos, se apercebem dela, como a M. salienta. Isto ilustra como, mesmo alunos cuja classificação era a mais elevada, já em anos lectivos anteriores, também beneficiam do trabalho colaborativo e dialógico, pois desenvolvem novas capacidades e competências, nomeadamente a capacidade de reflexão, de observação e análise, sentido crítico, mas também o respeito pelos outros e pela diversidade, que nos caracteriza a todos.

Estas capacidades e competências podem vir a ser úteis mesmo muitos anos mais tarde (são estáveis e consistentes na dimensão tempo) e noutros contextos, cenários e situações (algo semelhante, mas na dimensão espaço). Isso mesmo está ilustrado no que a M. nos conta, sobre o seu percurso na universidade, quando frequentava a licenciatura em Medicina. Muitos dos alunos que escolhem este curso, não gostam das disciplinas relacionadas com a Matemática, como a Estatística e as Probabilidades, que são obrigatórias naquela licenciatura. Como ela relata, quando estava a terminar o 2.º ano do curso universitário, muitos colegas se sentiram assustados com aqueles conteúdos.

> Os meus colegas estavam completamente em pânico com a Estatística e, sobretudo, com as Probabilidades. Mas eu, sabia que podia pensar como o V., para abordar os problemas. Podia fazer esquemas, desenhos, outras formas de resolução, que geralmente não se exploram nas aulas de Matemática. E, se tudo isso falhasse, podia sempre telefonar-lhe e estudar com ele. É cómico, mas desde o secundário, até os meus pais adoram o V., algo que me parecia impossível, no 9.º ano de escolaridade... Para as Probabilidades, ele é mesmo muito dotado, sabia? (M., E7, Junho 2003).

Perante um conteúdo mais complexo, a M. reconhece a vantagem de poder "pensar como o V.", ou seja, recorrer a estratégias de resolução por representação gráfica, algo que ela não teria aprendido a usar se não tivesse trabalhado com ele e outros alunos cuja L1 é o crioulo e que assumiam essa estratégia de resolução como preferencial. Por isso, ela reconhecia que tinha acesso a estratégias de resolução que não costumavam ser exploradas nas aulas de Matemática e que isso era uma vantagem. Por último, se tudo isso falhasse, podia sempre estudar com o V., que ela classifica como "mesmo muito dotado" em Probabilidades. Um outro aspecto curioso, mas importante, é ela realçar que, desde o 10.º ano de escolaridade, os pais dela adoram o V., algo inimaginável, sobretudo no início do 9.º ano de escolaridade. César (2009, 2013b) relata alguns episódios relacionados com as desconfianças do pai da M. em relação ao V. e, também, a sua aceitação e, depois, admiração pelo V., algo que ilustra como o trabalho colaborativo e dialógico, bem como a mediação cultural bi-unívoca (César, 2017), promovem uma educação e sociedade intercultural e inclusiva. Sem estas duas formas de funcionamento, o V. nunca teria ido a casa da M. e os pais dela não se conseguiriam aperceber da influência positiva que ele tinha nas aprendizagens dela, matemáticas e não só, mesmo quando já frequentavam turmas diferentes, no ensino secundário. Por isso, os impactes destas formas de trabalho vão para além da escola, abrangendo também as vivências sociais, ou seja, são transversais a vários contextos (educativo, familiar, social, profissional).

Na entrevista do final do 2.º ano do curso de ensino superior, o V. também reflectiu sobre o que tinha aprendido de mais importante quando participara nas aulas do projecto IC. O que ele relata, mostra mudanças nítidas no seu *dialogical*

self (César, 2009, 2013a, 2013b; Hermans, 2001, 2003), tanto no que se refere às *I-positions* (aluno, colega, amigo, entre outras), como às *Me-positions* (como eu acho que os outros me vêem, como eu me vejo). Mas também revela um apaziguamento interior, uma maior capacidade de lidar com os obstáculos, que a vida lhe coloca e que não deixaram de existir só porque foi aceite e conseguiu concluir um curso no ensino superior.

> O que aprendi, de mais importante, no IC não foi que podia ser forte a Matemática, porque nisso só acreditei depois do 10.º ano e, sobretudo, do exame de 12.º ano. O mais importante foi compreender que há sempre uma outra forma de ver as coisas, que podemos sempre encontrar uma solução e que é preciso acreditar que vamos conseguir. (...) E percebi que não podia utilizar as minhas capacidades para atacar os outros, que também precisava de aprender a trabalhar com eles (...) Aprendi a ser, a ver-me e a fazer-me ver aos outros de outra forma. (V., E7, Junho 2003).

Como o V. reconhece, o impacto mais importante não foi ter passado a ter classificações elevadas em Matemática até porque, como já vimos anteriormente, só depois do exame do 12.º ano de escolaridade ele interiorizou que obtinha classificações de excelência e raras. O que ele realça como mais relevante, são três pontos fundamentais: (1) perceber que há sempre outras maneiras de abordar um problema, outras resoluções possíveis, ou seja, que a diversidade, nomeadamente de formas de actuação, é uma características dos seres humanos; (2) acreditar que vamos conseguir chegar a uma solução, ter confiança nas suas próprias capacidades e competências, ter esperança; e (3) perceber que tinha de aprender a usar as suas capacidades e competências para trabalhar com os outros e não para os atacar, como ele fazia até ter participado no projecto IC. Este último ponto foi essencial para ele viver melhor na escola, mas também o ajudou muito no ensino superior e, posteriormente, na vida familiar, social e profissional.

Estes três pontos relacionam-se directamente com os objectivos do projecto IC pois: (1) põem a tónica na importância de respeitar a diversidade, algo próprio de uma educação intercultural e inclusiva; (2) realçam a relevância da auto-estima positiva e de ter esperança, de acreditar, algo que tentávamos promover,

através dos mecanismos de *inter-empowerment* e dos implícitos, que usávamos desde a primeira semana de aulas; e (3) o papel desempenhado pelo trabalho colaborativo e dialógico, de saber comunicar e trabalhar com os outros, algo que estava subjacente aos princípios do projecto IC (Ventura, 2012) e ao modo como se organizavam as aulas e a própria investigação (César, 2009, 2013a, 2013b, 2017, 2024b; César & Machado, 2024b, 2025).

Este relato do V. mostra que ele conseguiu internalizar mecanismos de *inter-empowerment*, que transformou em mecanismos de *intra-empowerment*, que já consegue utilizar de forma autónoma. Ilumina como a reflexão e a calma, que caracterizavam as aulas do 9.º ano de escolaridade, tiveram impactes no futuro, na capacidade de análise das situações e nas formas de agir e reagir. Essa tranquilidade, esse clima de não julgamento, são essenciais para que a pessoa se consiga sentir em paz consigo própria e, depois, possa estabelecer relações mais equilibradas com os outros. Como salientava Strecht (2011), "Só é capaz de amar o outro quem se ama suficientemente bem a si próprio (...)" (p. 116) e a participação no IC, incluindo as entrevistas de *follow-up* e os contactos informais que connosco estabelecia, autonomamente, tinham-lhe permitido isso: reflectir sobre a sua vida, sentir-se apreciado e passar a gostar mais de si próprio, enquanto aluno, enquanto colega de alunos das várias comunidades culturais, enquanto participante numa cultura nem sempre valorizada socialmente, enquanto participante numa socialização mais alargada, que ia para além do bairro. Um detalhe que, muitas vezes, passa despercebido nas escolas, mas que é fundamental para usar as capacidades e competências para construir, para estabelecer relações não tóxicas, e para ser capaz de desfrutar do que esse equilíbrio pode trazer para a vida escolar, social, pessoal e profissional.

Quando se pretende promover uma educação intercultural e inclusiva, não podemos ser ingénuos e pensar que o acesso ao sucesso académico e escolar é vivido de forma semelhante em todas as culturas, famílias e meios sociais. Nos mini-testes semanais, esta díade já tinha atingido Nível 5. Mas, apesar do V. ter ido ao quadro explicar, com sucesso, uma das resoluções, bem como dos contributos que dava para as mesmas, continuava convencido de que, quem sabia Matemática, era a M., não era ele. Apesar de, muitas vezes, ter sido ele quem sugeriu a estratégia de resolução adequada, achava que, sem ela, se trabalhasse

individualmente, teria obtido uma classificação negativa. Portanto, a insegurança ainda tinha um peso superior aos impactes da classificação obtida. Por isso, no primeiro teste individual, em finais de Outubro, sentia-se ansioso e a primeira sensação, como nos contou depois, foi achar que não ia conseguir responder a nenhuma questão. Na entrevista do final de ano lectivo (E2), descreve detalhadamente como se sentia e como achava que era uma fraude, pois iria desiludir o professor/investigador.

> Quando vi o 1.º teste... não os que fazia com a M. [refere-se aos mini-testes, em díade], o outro... o que eu achava que era mesmo Matemática, achei logo que não ia fazer nada... que não sabia nada daquilo... [Sorri e continua] Sabe aquela cena da cabeça a martelar 'Não prestas!!! Não prestas!!! Não prestas??? [Ri-se divertido] Agora, 'tou numa nice e até acho bué da fun!... Mas ali... até me doía a barriga!!!...
> Depois, olhei para o Prof.... estilo 'Veja lá se me acode!...'. Mas ele 'tava bué da calmo, na dele... sorriu e tal... e eu fiquei ainda mais aflito... Pensei, 'O *boss* acha que sei disto. 'Tou feito!' Respirei fundo umas 20 vezes... e nada... O coração a 10000... como se a dona mais boa se me declarasse na rua... Lindo!!! (V., E2, Junho 1998)

Perante um momento de avaliação formal, o teste individual, mais tradicional e, por isso mesmo, fazendo-lhe recordar as avaliações de anos lectivos anteriores, quando obtinha Nível 1, o V. volta a desacreditar e a representação social muito negativa, que tem de si próprio, enquanto aluno de Matemática, sobrepõe-se. Pensa que não consegue mobilizar capacidades e competências matemáticas. Achou logo que não conseguia responder, "que não sabia nada", ou seja, sentiu-se inseguro, ansioso, a ponto de sentir dores de barriga, um sintoma psicossomático, que costuma estar associado ao *stress*, à angústia e ao medo de falhar. Na cabeça dele, voltou a frase "Não prestas!!!", que tantas vezes tinha ouvido, nomeadamente, em contexto escolar, e que Strecht (2011) considera como palavras que destroem, que bloqueiam, algo que o V. também afirmava sentir. Apesar de estar a fazer este relato depois do ano lectivo ter terminado, quando já sabe que teve Nível 5, no 3.º período, e 100%, na prova final de escola, o que o faz dizer que, agora, aquela cena até lhe parece cómica, a sua descrição é muito

forte, muito cinematográfica, colorida, muito viva, levando-nos a perceber a angústia do momento.

Depois daquela aflição inicial, tentou olhar para o professor/investigador, para ver se ele o ajudava. Mas as regras do contrato didáctico, em momentos de avaliação, não eram essas. Por isso, o professor/investigador olhou para ele, sorriu, tentou transmitir-lhe calma e que acreditava nele – o que o V. reconhece – mas não se dirigiu à mesa dele, continuando sentado, na sua secretária. Aquilo que o professor/investigador pretendia que o acalmasse, teve o efeito contrário: ao ver que achava que ele conseguia responder ao teste, o V. sentiu-se ainda mais aflito, pois achou que o ía desiludir, algo que não queria que acontecesse: "Pensei, 'O *boss* acha que sei disto. 'Tou feito!' ". É curioso realçar que ele, que nas aulas usava um vocabulário cuidado e uma sintaxe complexa, nas entrevistas e conversas informais recorria frequentemente a imagens e a expressões, que dizia de forma carinhosa, mas que eram dele e revelavam humor, contribuindo para complementar com imagens, o que dizia. Em muitas delas, era como se pensasse em crioulo e falasse em português, como quando designa o professor por "*boss*" ou usa a expressão "acha que sei disto". Esta forma de falar não revelava falta de respeito. Da primeira vez que disse "bué" numa entrevista, olhou para a investigadora, para ver como reagia. Mas, como esta não se manifestou, passou a estar mais descontraído nas entrevistas e a usar uma linguagem mais livre. Esta expressão (bué, que significa muito) era utilizada frequentemente, tanto por alunos do bairro, como pelos do bairro novo, sendo muito comum entre adolescentes, mesmo hoje em dia.

Convém salientar que o V. não usava calão, nem palavrões. Não o fazia nas aulas, nos recreios, nas entrevistas e em conversas informais, nem sequer isso aparecia nos relatórios dos anos lectivos anteriores, em que ele era tão criticado. Apesar de, no bairro, este tipo de linguagem ser muito comum, nos contextos onde contactávamos com ele, não o víamos usá-la, mesmo quando ele não sabia que estava a ser observado, como no recreio. O que aparecia, nas entrevistas, eram descrições com humor e muito cinematográficas, com uma forte componente visual, como quando ele referiu que o professor/investigador estar convencido de que ele saberia responder, só o tinha feito sentir-se tão aflito que, mesmo respirando 20 vezes, não se acalmou e ficou com o coração a 10000, "como se a

dona mais boa se me declarasse na rua...". Quase conseguimos ouvir o coração a bater e ver a cena, com esta descrição. Mas "dona" é uma maneira respeitosa de designar uma mulher, em crioulo, que se usa para pessoas de quem se gosta e respeita e "mais boa", para eles, significa mais bonita. Portanto, o que ele está a afirmar é que estava tão nervoso como se a mulher mais bonita se lhe tivesse declarado, no meio da rua e ele ficasse com o coração a 10000, o que é uma forma muito cinematográfica, muito colorida, de definir a aflição que sentia naquele momento.

Para além disso, a maneira como descreve a sua reacção no primeiro teste revela também alguma ironia, em relação à sua aflição. Mostra capacidade de usar humor, de brincar, com o que então sentia, ou seja, consigo próprio. Portanto, ilustra a sua maturidade emocional, ao mostrar capacidade de reconhecer que ficou aflitíssimo, mas que tanta aflição não era justificada. Pelo que tinha sucedido nas aulas, naquele ano lectivo, ele reconhece, agora, muitos meses depois, que deveria estar mais tranquilo. Porém, naquela altura, a parte emocional sobrepôs-se à racionalidade e ele, que tinha sido tão criticado e obtido níveis negativos tantas vezes, só conseguia sentir que isso ia voltar a acontecer. O que ele ainda não analisa, nesta entrevista (E2), embora o venha a fazer alguns anos depois, é como esta angústia é a marca do que ele viveu nos anos anteriores, dentro e fora da escola, que deixou cicatrizes profundas.

Mas, como o professor/investigador não se aproximou e ele não o queria desiludir, mesmo achando que não sabia nada, foi procurar um problema em que pudesse recorrer a uma estratégia de resolução por representação gráfica, aquilo que ele designa por "desenhar". Acabou por encontrar um problema e ficar convencido que, naquela tarefa, a resolução que fizera "até 'tava bué de fixe", o que o animou. Esta atitude, é uma primeira marca de resiliência, de que os implícitos empoderadores, o interesse do professor/investigador pelas formas naturais de o V. fazer Matemática, estavam a ter impactes positivos nos seus desempenhos. Depois, resolveu as questões que envolviam fracções que, como refere, tinha aprendido quando resolveram o problema do queijo, que acima analisámos. A seguir, tentou resolver as equações. Portanto, apesar da desconfiança, que o fazia pensar "que estava tudo errado", que não sabia nada, ele foi avançando nas resoluções de uma parte do teste, como descreve. De realçar como olhar para o

professor/investigador era algo que acontecia, cada vez que se sentia mais inseguro, e como a vontade de não o desiludir o fazia continuar a resolver algumas questões do teste.

> Depois, saltei, e vi um prob [abreviatura de problema] que era bué da nice p'a desenhar. E lá desenhei e achei qu'até 'tava bué da fixe... Fiz as fracções, que isso eu tinha aprendido a somar naquela cena dos queijos [suspira e continua] Depois, lá papei as equações... sempre a achar que 'tava tudo errado... que não sabia nada daquilo... mas lá fui... olhava para o mandas…. lá me acalmava… e desenhava ou escrevia…...
> Quando recebi a folha [refere-se ao teste] e vi que nem tinha nega, nem quis acreditar!!! Achei que o *boss* se tinha passado e era a nota doutro qualquer (V., E2, Junho 1998)

O professor/investigador, mesmo sem ir lá, tinha um papel tranquilizador. Aliás, ele trata-o por duas expressões carinhosas, para quem o conhecesse bem e também soubesse crioulo: "o mandas" (porque o professor é quem manda, quem decide que eles resolvem aquele teste individual) e "o *boss*", expressão muito usada em crioulo. Estas expressões que, para o V., não eram de todo ofensivas, se fossem escutadas pelos professores dele de anos lectivos anteriores, seriam interpretadas como tal, o que ilustra bem a necessidade de mediação cultural bi-unívoca, em escolas cujas L1 e modos de viver se referem a culturas muito diferenciadas. O V. reconhece que, olhava para o professor/investigador, e lá se acalmava, o que mostra como uma pessoa que nos aprecia, que acredita nas nossas capacidades e competências, bem como nas aprendizagens que fizemos pode, só pela sua calma e postura, acalmar e ajudar a que o aluno continue a resolver as tarefas. Strecht (2011) realça a importância destas pessoas, quando reconhece que "ter referências, sentir a presença de alguém para além da família, é ter, de igual modo âncoras psíquicas, espaços e tempos onde, se necessário, todos se podem reencontrar a si próprios através da relação com os outros" (p. 55). Nesta situação angustiante, o V. conseguiu recorrer à figura do professor/investigador como uma "âncora psíquica", como alguém que o acalmava e que lhe permitia reencontrar a calma suficiente para continuar a responder ao teste individual, uma

situação pedagógica bastante conotada com aspectos emocionalmente muito negativos para ele, que lhe causavam sofrimento.

No dia da entrega do teste individual, o professor/investigador usou a ordem alfabética para os distribuir. Nos testes posteriores, veio a alterar este procedimento, porque se apercebeu de que seria pouco justo: seriam sempre os mesmos a receber primeiro o teste. Como as díades eram alteradas, quer em termos de pares, quer espacialmente, na sala de aula, para que todos estivessem algumas semanas à frente, outras no meio e outras atrás, permitindo que cada aluno vivenciasse as diversas posições espaciais, nos testes seguintes decidiu entregar os testes começando pela última fila de mesas e avançando, a partir daí. Este procedimento permitia-lhe visualizar toda a turma, quando começava a entregar os testes e, depois, quando avançava e deixava de ver alguns alunos, estes já estavam ocupados a ver o teste. Portanto, mais silenciosos e sossegados. Isto ilustra como as decisões sobre as práticas pedagógicas, incluindo as mais simples, como entregar os testes, eram alvo de reflexão e discussão, na equipa do IC. Era comum ir fazendo uma análise crítica das práticas, uma reflexão, e alterando as mesmas, quando se descobriam formas mais adequadas de as realizar, que fossem mais justas, interculturais e inclusivas.

Os alunos estavam expectantes. Depois de um mês e meio em que tinham trabalhado bastante, aquele era o primeiro instrumento de avaliação que eles reconheciam como tal, pois era dos que já tinham sido utilizados nos anos lectivos anteriores, num contrato didáctico dito tradicional. Muito importante foi ver que, nas díades, eles não estavam apenas preocupados consigo próprios, mas também com a classificação obtida pelo colega, que festejaram, em alguns casos, efusivamente. Este era um primeiro critério de que o trabalho em díade estava a contribuir para a interculturalidade e inclusão, pois esta não existe sem solidariedade, sem interesse pelo outro. Era também uma marca de que a turma funcionava como uma comunidade de aprendizagem (Civil, 2007), na qual os alunos partilhavam os sucessos, bem como as dificuldades, procurando ultrapassá-las.

Para muitos alunos, era a primeira vez que obtinham uma classificação positiva em Matemática. Para além disso, também se preocupavam com os amigos. Por exemplo, as quatro meninas que costumavam ter Nível 4 ou 5, estavam particularmente atentas quando era a vez de uma delas receber o teste e

manifestaram a sua alegria, embora de forma contida, quando viram que todas tinham conseguido atingir Nível 5. Isto significava que duas delas tinham mantido o Nível 5, mas a M. teve uma percentagem mais elevada que o habitual (98%), e outras duas tinham subido para o Nível 5. Como todas pretendiam ir para o ensino superior, isso deixou-as orgulhosas e mais confiantes quanto à utilidade daquela forma de trabalho, que afinal também as favorecia a elas. O V., sorriu para a M. e disse-lhe: "Boa! Continuas a ter Nível 5. Não te prejudiquei..." (V., O, registada no DB do professor/investigador, Outubro 1997), mostrando não só satisfação, mas alívio, pois ele sabia que ela não o teria escolhido como par, tal como ele não a teria escolhido a ela. Por isso, não queria ser responsável por ela ter menos sucesso académico.

Devido ao seu nome próprio e a ter sido usada a ordem alfabética, o V. foi dos últimos a receber o teste. A M., que já reconhecia as capacidades e competências dele, e já gostava de trabalhar com ele, estava convencida de que ele teria uma classificação positiva, mas ele não acreditava nisso. Tinha ficado muito contente com a classificação da M. e de outros colegas do bairro, que conseguiram ter positiva. Mas, em relação a si próprio, a sua insegurança não lhe permitia admitir que isso pudesse acontecer. Por isso, quando recebeu o teste e viu que não tinha negativa, não reagiu. A M. ficou feliz e deu-lhe os parabéns, e ele nem respondeu. Só no intervalo percebemos porquê: ele achava que o professor/investigador se tinha enganado e que aquela era a classificação de outro aluno qualquer. Mesmo quando este lhe garantiu que tinha verificado as classificações todas mais de uma vez e que sabia que ele tinha mesmo 52%, o V. não pareceu convencido. Portanto, o professor/investigador analisou o teste todo à frente dele, explicando-lhe onde tinha descontado pontuação e como tinha obtido a que estava escrita no teste. Só então o V. acreditou que tinha mesmo uma classificação positiva. Mas nem assim se mostrou muito feliz. Eram muitos anos de insucesso e ele achava que, no próximo teste individual, voltaria a ter negativa. Portanto, não valia a pena comemorar algo que não se manteria.

Em casa, o V. também não disse que tinha tido uma classificação positiva a Matemática, conforme explicou na aula seguinte, quando apareceu com o teste sem estar assinado pelo encarregado de educação. Com um ar cabisbaixo, disse ao professor/investigador que não o queria desrespeitar, mas que não queria dar

falsas esperanças aos pais, nem ouvir as gozações deles e dos irmãos quando, a seguir, tivesse uma classificação negativa. Como o teste era positivo, o professor/investigador resolveu negociar: ele guardava o teste no cacifo, sem o amarrotar e se, o próximo, voltasse a ser positivo, trazia os dois testes assinados. O V. concordou, mas ainda sem acreditar que isso pudesse vir a acontecer. Mas cumpriu: quando teve Nível 4, no teste individual seguinte, em Novembro, trouxe os dois testes assinados pelo encarregado de educação, embora tenha acrescentado: "Eles só querem que eu acabe o 9.º ano, para começar a trabalhar. Se é com positiva ou negativa a Matemática, não querem nem saber." (V., CI, registada pelo professor/investigador, Novembro 1997).

Estes episódios ilustram nitidamente como o insucesso académico e escolar é vivido de formas muito diferentes pelos alunos que têm pais com cursos superiores, profissões socialmente valorizadas e cujas trajectórias de participação ao longo da vida é suposto incluírem uma licenciatura e aqueles cujos pais são analfabetos, ou concluíram a escola primária (actual 1.º ciclo do ensino básico), cuja profissões são precárias, pouco valorizadas socialmente e que pensam começar a trabalhar assim que concluírem o 9.º ano de escolaridade, como também revelam César (2009, 2013a, 2013b, 2017, 2024b) e César e Machado (2024b). Quando a M. e as amigas tiveram Nível 5 foram elogiadas em casa e os pais valorizaram o esforço delas. Mas, quando o V. e alguns colegas do bairro tiveram, pela primeira vez, Nível 3 a Matemática, os pais não reagiram, ou disseram-lhe que o que importava era terminarem o ano e começarem a trabalhar, para trazerem dinheiro para casa. Por isso, ter muito sucesso académico não criou conflitos entre as diversas *I-positions* (filha, aluna, amiga, colega) da M. e das amigas, mas criou muitas dúvidas ao V. e vários conflitos entre as suas *I-positions* (César, 2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b). Afinal ele devia começar a trabalhar, ou inscrever-se no 10.º ano de escolaridade? Devia acreditar que podia ter uma vida melhor se continuasse a estudar, ou pensar como os pais, que afirmavam que não era um papel (referiam-se ao diploma) que lhe dava de comer? A Escola era, ou não, uma inutilidade? E se decidisse continuar a estudar, como é que iria conseguir pagar os estudos e a sua vida?

Como revela na primeira entrevista (E1), as dúvidas do V., ou seja, os seus conflitos internos, entre as diferentes *I-positions*, fizeram-se sentir assim que ele

deixou de faltar às aulas, de chegar atrasado e começou a participar nas aulas de Matemática.

> Muitas vezes ía para casa todo baralhado: Afinal, eu queria aprender Matemática ou preferia baldar-me? E se queria baldar-me, porque é que dava comigo a pôr o dedo no ar e a querer responder? Tudo aquilo me parecia marado... bué da confuso... Mas... a verdade é que não saltava aulas, nem mesmo às primeiras, que era preciso acordar e sair de casa cedo. Até parecia outra pessoa... ou muitas pessoas diferentes à briga... dentro de mim... (...) Não sei dizer... eu achava que não sabia Matemática, que não topava nada daquelas cenas... mas depois respondia, tentava, não desistia... era como se houvesse uma coisa a empurrar-me dentro de mim... uma força que eu não percebia de onde vinha, mas que estava lá...
> (...) Ah! E gostava de acertar... Tinha medo... medo de me tornar um betinho... Mas também gostava de acertar, de ver que os outros aprendiam comigo... que o 'stor ficava todo entusiasmado com o que eu tinha feito (...) Estava a descobrir tantas coisas em mim... que parecia que cada dia era diferente (...) (V., E1, Dezembro 1997)

Não usando essa terminologia, que não conhecia naquela altura, a descrição do V. ilustra os conflitos entre as diferentes *I-positions* (César, 2009, 2013a, 2013b; Hermans, 1991, 2001). Ele queria responder (ser um aluno participativo) ou queria "baldar-se" ou "saltar aulas", continuando a ser rebelde? Como ele refere, "Até parecia outra pessoa... ou muitas pessoas diferentes à briga... dentro de mim...", sendo o que ele designa por "pessoas diferentes", as diversas *I-positions* que ele assumia, e o estarem à briga, os conflitos que havia entre elas. Ele sentia que estava a mudar e, por um lado, gostava de acertar, de ser capaz de fazer, de ser apreciado pelo professor/investigador, de ver que os colegas conseguiam aprender com ele. Mas, por outro lado, tinha medo de se tornar "um betinho", algo que, para ele, bem como para as outras pessoas do bairro, era visto como a evitar, como depreciativo. O mais interessante, é que ele próprio reconhece que "parecia que cada dia era [uma pessoa] diferente", ou seja, ele identifica a evolução do seu *dialogical self*, as mudanças que estão a acontecer, entre as diversas *I-* e *Me-positions* (Hermans, 2001, 2003). Esta reflexão ilumina a existência de

meta-posições identitárias (Meijers & Hermans, 2018b), que permitem ter uma posição global e inter-situacional do que acontece no seu *dialogical self*, levando a uma compreensão mais aprofundada de como gerir os conflitos entre as diversas *I-positions*.

Aquelas novas vivências tornavam cada dia diferente e também o faziam descobrir novas capacidades e competências, mais compreensão e conhecimento do mundo, ou outros valores. Mas, se tudo isto tinha vantagens na escola, onde era apreciado, também o fazia sentir mais longe da família e das pessoas do bairro, o que lhe causava sofrimento. Esta é a característica diferenciadora mais profunda que distingue o sucesso académico dos alunos do bairro: há alegria, mas também sofrimento; é-se mais apreciado na escola, mas mais criticado no bairro, pela família, amigos e vizinhos. Por isso, para estes alunos, o sucesso académico tem um sabor agridoce e, como revela César (2009, 2013a, 2013b, 2017), quando o sofrimento se torna demasiado forte, insuportável, mesmo com sucesso académico, eles acabam por abandonar a escola. Alguns, sobretudo meninas, desistem da Escola, não porque queiram fazê-lo, mas por não se conseguirem opor às famílias e amigos. Daí a mediação cultural bi-unívoca ter sido tão importante, pois também teve impactes nas famílias, em relação à valorização que elas atribuíam à Escola.

A resiliência, a capacidade de luta, as injustiças sociais que têm de ultrapassar, tornam as trajectórias de participação ao longo da vida destes alunos muito mais desafiadoras, como mostra a meta-análise que fizemos, em relação aos dados do *follow-up*. Estes conflitos internos estão bem patentes na entrevista (E3) do final do 10.º ano de escolaridade do V., como se pode ver no seguinte excerto.

> Ainda hoje tenho alturas em que não acredito que tive tão boas notas e que gostei de estudar. Parece que sou outro... que não me reconheço... e, às vezes, nem sei se gosto mais de mim assim. Aqui, vivo melhor. Todos gostam mais de mim. Mas, no bairro, nem sempre sei... parece que estou mais longe de tudo... não sei... tenho as férias para pensar nisto... mas acho que já não quero desistir de tirar um curso... quero é perceber como faço... para saber viver dos dois lados. (V., E3, Junho 1999)

Quando decidiu inscrever-se no 10.º ano de escolaridade, o V. não teve o apoio da família. Achavam que ele devia deixar de estudar e ir trabalhar, para trazer dinheiro para casa, pois este fazia falta. Mas ele informou-se na escola, percebeu que, com as classificações obtidas no 9.º ano de escolaridade, conseguia receber uma pequena bolsa de estudo, além dos apoios do SASE e decidiu inscrever-se. Como já tinha idade para trabalhar passou as férias de verão em empregos precários que conseguiu e deu o dinheiro que ganhou aos pais, para ajudar nas despesas. Mas avisou-os de que só ia trabalhar nas férias, o que não foi bem visto. No entanto, como o último emprego foi num estúdio de fotografia e ele gostava muito desse trabalho, continuou lá em *part-time*. Por isso, havia aquela dualidade. Na escola, vivia melhor, tinha amigos, classificações elevadas, estava num espaço que era calmo e seguro, era apreciado, conseguia ter bolsa. Mas, no bairro, sentia-se mais longe de todos. Tinha conversas diferentes das pessoas do bairro, além de passar muito tempo a desenhar, tinha objectivos diferentes, pois não queria casar e ter filhos cedo, sonhava em ter uma casa com melhores condições e um emprego de que gostasse, com um salário que lhe permitisse viver sem dificuldades. Mais uma vez, os conflitos entre as diferentes *I-positions*: entre ser aluno de sucesso; e ser filho, amigo e vizinho, no bairro. Mesmo o ter conseguido um emprego, em *part-time*, num estúdio de fotografia, onde esteve durante todo o ensino secundário, não facilitou as relações familiares, pois achavam que, se ele tivesse deixado de estudar, ganharia mais dinheiro. Mas abriu-lhe novos horizontes, pois sentiu-se valorizado e que apreciavam as suas capacidades e competências, dando-lhe progressivamente mais responsabilidades, algo que nunca tinha acontecido nos empregos precários anteriores. Assim, este emprego no estúdio de fotografia, ligado às Artes, de que ele gostava tanto, onde podia usar a sua capacidade de visualização, mostrou-lhe que a vida profissional podia ser algo que lhe permitisse ganhar um salário melhor e que, acima de tudo, lhe desse mais prazer. O patrão elogiava-o, os clientes queriam que fosse ele a fotografar as crianças e famílias, a fazer os enquadramentos e, em poucos meses, passou também a fotografar eventos.

Para a M., a trajectória de participação ao longo da vida era clara: ía tentar ter as melhores classificações que conseguisse para entrar no curso de Medicina e tinha o apoio dos pais, da família e dos amigos. Para o V., existiam muitas

barreiras e ele só conseguia ir decidindo o que fazia no ano seguinte, pouco a pouco, mas com dúvidas, com hesitações, sem ter a certeza de ter tomado a melhor decisão, algo que se manteve durante muitos anos. Achava que queria tirar um curso, mas precisava de aprender a viver naqueles dois mundos contraditórios: a escola e o bairro. Um deles, a Escola, podia abrir-lhe novas possibilidades no futuro. Mas, ao outro mundo, ele estava ligado emocionalmente. Ver a família, os amigos e os vizinhos desaprovarem os seus planos era doloroso e fazia-o hesitar sobre o melhor caminho a seguir.

> Para mim, a vida nunca foi fácil. Não era fácil quando falhava na escola. E não foi fácil quando tive sucesso, na escola e profissionalmente. O sucesso, na escola, fez-me querer tirar um curso superior e isso trouxe-me conflitos em casa, no bairro. Percebi que, para conseguir tirar um curso, tinha de me afastar de lá e essa decisão custou-me, foi difícil de tomar. O quarto [que alugou] até tinha melhores condições: era só meu, tinha uma cama confortável, armários e prateleiras, a casa tinha casa-de-banho, água canalizada, eletricidade, máquina de lavar roupa... Era mais do que tinha tido até ali. Eu tinha tão pouca roupa, que o armário ficou quase vazio... Mas, apesar do conforto, de estar a fazer o que decidira, sentia a falta da vida do bairro: a música, as festas onde se dançava e convivia, a comida, de falar a quem passava, porque nos conhecíamos todos... Até tive saudades da escola, veja lá!... [Ri-se] Porque no secundário já tinha amigos e já me sentia aceite, tinha com quem falar, gostava de lá estar... Era um ambiente bem mais calmo do que no bairro. (V., E13, Julho 2009)

O que o V. descreve é uma vida de luta: primeiro, para conseguir ter sucesso académico e escolar, até ao 9.º ano de escolaridade; depois, para ter condições que lhe permitissem concluir o ensino secundário e tirar um curso no ensino superior; e, por último, como revela no excerto seguinte, para ser aceite pelos clientes, na vida profissional. Até perceberem e aceitarem que ele era um dos melhores alunos do curso, houve vários episódios desagradáveis: sem motivo, duvidaram que os trabalhos tinham sido feitos por ele, apenas porque ele era muito novo e não tinha arquitectos na família, logo não podia saber (ou saber fazer) aquilo. Resolveu-se à base de muita resiliência. Mas ele sentiu-se, mais uma vez, injustiçado. Ao contrário dos outros colegas, que também obtinham

classificações elevadas, ele teve de lutar muito para ser respeitado, para acreditarem que era por mérito próprio que realizava trabalhos com aquela qualidade. Esse vazio social inicial foi o que mais lhe custou, levando-o a ter saudades do bairro e, até, da antiga escola, ou a questionar-se sobre se tinha tomado a decisão certa. Uma dúvida que o acompanhou durante toda a licenciatura e nos primeiros anos, como arquitecto. Sabia que os patrões se tinham conhecido durante a faculdade e, desde aí, forjado uma amizade que permanecia e os fizera serem sócios. Mas ele, nos primeiros anos, teve dificuldade em conseguir que o aceitassem nos trabalhos de grupo, apesar de ser um aluno que contribuía com ideias excelentes. Mesmo quando isso foi ultrapassado, dizia: ”conheci muitas pessoas, mas amigos, nenhum... ninguém se aproxima assim tanto de mim...” (V., E8, Julho 2004).

Na mesma época, a M. estava feliz e sentia-se bem na faculdade onde estudava. Tinha entrado para Medicina, como desejava. Adorava o curso e o hospital onde decorriam as aulas, tinha um elevado sucesso académico e os pais e amigos estavam orgulhosos dela. Os amigos que tinha, desde a adolescência, estavam todos a tirar cursos superiores e encontravam-se quando podiam, em Lisboa. Ela continuava a viver com os pais e não planeava alterar essa situação até ter concluído a licenciatura. Apercebia-se, pela vida do V. e de outros colegas como ele, que para eles a vida era bem mais desafiadora. Por isso, passou a sentir-se muito grata pelas condições de vida que sempre tinha tido e por poder tirar um curso superior sem ter de trabalhar. Sabia o privilégio que isso representava e achava que, se só estudava, “tinha obrigação de ter notas elevadas, porque estava no curso que sempre tinha querido e, mais tarde, isso facilitava a colocação num hospital onde me agradasse trabalhar” (M., E7, Junho 2003). Ela tinha tirado a carta de condução, oferecida pelos pais como prenda do 12.º ano de escolaridade. Eles tinham-lhe oferecido um carro, o que lhe facilitava muito as deslocações, sobretudo quando começou a ter turnos de noite, no hospital. Durante a escolaridade não sentiu discriminação negativa de género. Por isso, a trajectória de participação ao longo da vida da M. decorria como era esperado, de uma forma suave, que lhe agradava.

O V., por diversas vezes, salientou os obstáculos com que se deparava. Não se queixava, porque achava que, para quem vinha do bairro, a vida dele até corria

muito bem. Mas pensava sobre isso, analisava o que lhe sucedia e tirava daí ilações pertinentes. A partir do final do 10.º ano de escolaridade, identificava claramente os conflitos entre as *I-positions* que compunham o seu *dialogical self*. Começou, também, a explicitar o que isso o fazia sentir: (1) umas vezes, sentia-se dividido entre aqueles dois mundos, o bairro e a escola; (2) outras, apercebia-se de que o sucesso lhe tinha trazido solidão; e (3) noutras ocasiões, sentia-se orgulhoso do que tinha conseguido e de si próprio, de ser quem era. Por isso, os sentimentos mudavam, oscilando entre estar feliz e sentir-se muito sozinho, podendo mesmo estar desanimado, quando os obstáculos eram maiores.

> Ter sucesso, para mim, nunca será tão fácil como para a M. ou para outros alunos cujas famílias têm estudos e esperavam que eles fossem para a universidade. Cada vez que eu tenho sucesso na escola, também me sinto mais longe dos meus pais e família. Às vezes sinto-me dividido entre estes dois mundos. Outras só me sinto sozinho porque tive tanto sucesso. E outras sinto-me orgulhoso de mim próprio e amo o emprego que tenho e a vida que escolhi (...)
> É como um carrossel: umas vezes *up* e outras *down*. Mas tenho a certeza de que é muito mais difícil para mim, preto retinto, que vem de um bairro pobre, com uma família que não tem nenhum nome soante... Desde o início que senti que tinha de provar muitas coisas que para os outros estavam garantidas... Estavam ali... Eram *peanuts*... E ter de estar sempre a provar que se presta pode ser muito cansativo... (V., E3, Junho 1999)

Como ele diz, "é como um carrossel: umas vezes *up* e outras *down*", ou seja, há oscilações no que se refere à maneira como se sente. Tem consciência de que, ser do bairro, negro, sem uma família "com um nome soante", implica ter de lutar muito mais, ter de ser muito melhor, para ser reconhecido como tal. Este é um discurso, mas também uma consciência racial e de classe, que observámos em muitos dos alunos de origem cabo-verdiana, que frequentaram e concluíram cursos superiores. Todos eles referem que, muitas vezes, estavam cansados e com vontade de desistir, porque precisavam de estar sempre a provar que sabiam, que eram competentes, que eram honestos, que não roubavam, que tinham dinheiro para pagar a casa que queriam alugar, que não íam estragar a casa toda ou tê-la

muito suja. Como realça o V., neste excerto de entrevista, "ter de se estar sempre a provar que se presta pode ser muito cansativo".

As capacidades e competências do V. ficam bem patentes se tivermos em conta que ele terminou um curso superior de seis anos em quatro, obtendo uma média muito elevada. Como estudar e trabalhar, para ele, representavam um enorme esforço económico, além de não se sentir confortável e apreciado na faculdade, decidiu, em cada ano lectivo, inscrever-se nas disciplinas do ano seguinte que a lei lhe permitia. Isto significa que fez disciplinas correspondentes a um ano e meio em cada ano lectivo. Assim, esperava concluir o curso mais cedo e começar a trabalhar com a licenciatura terminada, o que lhe daria melhores condições de vida: um salário mais elevado e, sobretudo, só trabalhar no *atelier*, onde era apreciado e sentia que gostavam dele, como pessoa. Por isso, enquanto a M. fez o curso em seis anos, como previsto, terminando em Julho de 2007, o V. acabou o curso em Agosto de 2005, data em que lhe lançaram a última classificação. Como já trabalhava num *atelier* de Arquitectura, onde entrara nas férias do 12.º ano de escolaridade, como *office boy* (comprava materiais, ía aos correios, entregava projectos, ajudava nas colagens e montagens de maquetes, entre outras funções), continuou a trabalhar lá. Afirmava frequentemente que, ter conhecido aqueles patrões, ter tido aquele emprego, tinha sido fundamental, do ponto de vista profissional e para a sua estabilidade mental. Como relata César (2013a, 2013b), o V. considerava algumas figuras como muito relevantes no seu empoderamento e trajectória de participação ao longo da vida: a professora de 1.º ciclo do ensino básico, o professor de Matemática do 9.º ano de escolaridade, a coordenadora do IC (investigadora e psicóloga), com quem contactava anualmente durante o *follow-up* e, mesmo depois deste terminado, e os patrões do *atelier* onde trabalhava e que, depois de o V., ter ido viver para o estrangeiro, continuaram a trabalhar com ele, em projectos que desenvolveram nesse país.

César (1996) sublinha a relevância dos professores do 1.º ciclo do ensino básico, na trajectória de participação ao longo da vida, nomeadamente através das primeiras aprendizagens, que esta autora considera serem "extremamente relevantes do ponto de vista afectivo, pois são elas que vão fazer a criança ter, ou não, uma boa relação com a escola" (p. 19). O V. teve uma professora que valorizou significativamente as suas capacidades e competências nas artes plásticas,

bem como a sua riqueza vocabular. Por isso, estes primeiros quatro anos de escolaridade trazem-lhe memórias agradáveis. Mas isso mudou quando, a partir do 2.º ciclo do ensino básico, deixaram de apreciar a sua forma de fazer e aprender Matemática, de estar, de se vestir e pentear, bem como de viver.

Mas também revelou as dificuldades do início da vida profissional, incluindo algumas que, nem ele nem os patrões, tinham conseguido prever. É que os clientes, quando o viam como uma pessoa que fazia recados, elogiavam o seu profissionalismo. Aquelas funções correspondiam ao que elas esperavam que ele fizesse, o que revela a subtileza que podem assumir algumas posições racistas. Mas isso mudou quando já assinava os projectos e era um arquitecto. Como salienta, no excerto de entrevista seguinte, "era demasiado novo e demasiado negro para ser tão bom" e isso era algo para que não se tinha preparado, previamente.

> Quando terminei o curso, em 2005, os meus patrões foram impecáveis e passaram a deixar-me assinar os projectos e tinha um salário muito bom, para um recém-licenciado. Já trabalhava com eles há vários anos e eles conheciam as minhas capacidades e empenho. Os problemas começaram a surgir com os clientes, quando eu ia acompanhar os projectos. Quando os enviava, não se via quem eu era, nem ao telefone. Eu falo bem português, sou educado, não dava para perceberem as minhas origens, nem a cor da pele, nem a idade... Mas, quando eu aparecia, era um problema: era demasiado novo e demasiado negro para ser tão bom... (V., E13, Julho 2009)

Como afirma, perceberem que um projecto podia ser rejeitado por ele ser quem era, foi um choque. Mas, com a resiliência que os três tinham, ele e os patrões resolveram lutar contra o racismo e idadismo, subjacentes às rejeições. Mas, se isso resolvia um problema prático, não evitava a frustração, como salienta. Para além disso, tem consciência de que, apesar do seu valor profissional, se não fosse o apoio dos patrões, provavelmente não teria conseguido ultrapassar aquela situação, pelo menos em Portugal. No país para onde emigrou, isso não aconteceu, o que o fez optar por continuar a viver lá.

> Isso foi um choque. Para mim e para os meus patrões, que também não tinham conseguido prever aquela reacção. Foi bem frustrante... até conseguir ser aceite... até usar o meu nome... E sem eles [os patrões], sem a maneira como sempre me defenderam, não sei se teria chegado lá... ou ido para o estrangeiro, quando houve a crise económica cá... (V., E13, Julho 2009)

Porém, as surpresas não íam ficar por aqui e as próximas íam envolver a M. e o V., como nos relatou. A maioria das pessoas, incluindo o V., estava convencida de que os médicos ganhavam bem, que eram pessoas ricas. Em Portugal, naquela época, era uma profissão com bastante prestígio social. Portanto, esperava que a M. tivesse uma vida desafogada, privilegiada, como sempre tinha tido, com muito mais disponibilidade económica do que a dele. O que ele ignorava era que o internato hospitalar, após a licenciatura, significa muitas horas de trabalho, mas um baixo salário e que raramente se termina a especialização antes dos 30 anos de idade. Isso significa que, durante vários anos, os médicos têm condições de trabalho muito duras, muito mais difíceis do que aquelas que o V. tinha e, subitamente, ele viu-se confrontado com algo que nunca imaginara: a M. a ganhar muito menos que ele e a ter condições de vida bem mais complicadas do que as dele. Apercebeu-se disso porque, depois do 9.º ano de escolaridade, nem irem para faculdades diferentes os fez afastar. Por isso, ía sabendo as condições de vida dela, enquanto licenciada.

> Sempre conheci a M. como alguém com uma vida desafogada, sem preocupações de dinheiro. Os pais tinham um apartamento que, na altura, me parecia um palácio, tinham carros, viajavam. Quando fomos para a faculdade, as diferenças de classe, entre nós, eram nítidas: eu vivia num quarto alugado, tinha de trabalhar para viver, precisava da bolsa de estudo, quase não tinha roupa e fazia imensas contas, para decidir o que podia, e não podia, fazer. Ela vivia em casa dos pais, tinha carro dela, nunca precisou de trabalhar, vestia-se de acordo com a moda e estava a estudar Medicina. Portanto, sempre esperei que ela continuasse a ter muito mais possibilidades económicas e, sinceramente, isso não me incomodava. Ela já tinha partido em vantagem, era natural que continuasse a estar em vantagem. Esperava que o curso me permitisse viver bem,

> mas nunca imaginei sequer que, um dia, pudesse viver melhor do que ela, do ponto de vista económico. (V., E13, Julho 2009)

Neste excerto, o V. relata as diferenças sócio-económicas que existiam entre quem, como ele, vivia no bairro e aqueles que, como a M., viviam no bairro novo, de apartamentos e vivendas. Como salienta, "ela já tinha partido com vantagem". Isso verificava-se desde o nascimento ou mesmo nas gerações anteriores. Manteve-se na escola secundária, mas também na universidade. Apesar de ambos terem entrado em cursos cujas médias eram elevadas, as condições de frequência dos mesmos, para cada um deles, tornavam visíveis as diferenças sócio-económicas e culturais, que continuavam a existir. Porém, como sempre tinha conhecido essas diferenças, como se tornara amigo dela e gostava dos pais dela, que o tratavam muito bem, segundo expressou em diversas conversas informais e entrevistas, algo corroborado pela M., o V. não se sentia incomodado com isso. O que ele queria, era passar a ter melhores condições de vida, mais desafogo económico, poder ajudar os irmãos mais novos a tirarem um curso. Mas nunca imaginou que poderia vir a viver com melhores condições que ela.

No entanto, o V. começou a trabalhar desde o final do 9.º ano de escolaridade e, a tempo inteiro, de uma forma mais continuada e consistente, a partir das férias de verão depois de concluir o 12.º ano de escolaridade. Quando terminou a licenciatura, em 2005, continuava no mesmo *atelier* e, como já conheciam as capacidades e competências dele, bem como a seriedade com que se empenhava nos projectos, foi promovido e passou a ter um salário mais elevado. Assim, enquanto a M. ainda estudava, já o V. estava a trabalhar, como licenciado. Para além disso, pela sua inserção profissional, tinha conseguido comprar uma casa, que precisava de ser remodelada, tinha concebido e feito os melhoramentos necessários, vendendo-a com lucro. Processo que repetiu, depois, mais duas vezes, até ter dinheiro suficiente para comprar um terreno e construir uma casa projectada por si, com jardim, o seu sonho. Como a maioria das pessoas que tinham vivido no bairro, não gostava de apartamentos. Preferia vivendas, com jardim, com espaço para ter árvores e um canto onde pudesse desenhar, ao ar livre, algo que continuava a fazer quando tinha tempo. Entretanto tinha tirado a carta de condução e tinha carro da empresa onde trabalhava, o que lhe permitia viver fora

de Lisboa, não muito longe do mar, como gostava. Por isso, estava contente com a evolução da sua vida, naqueles quatro anos após a licenciatura.

> Tive imensa sorte em ter ido trabalhar para aquele *atelier*. Aprendi imenso, li imensos livros a que não teria tido acesso se eles [os patrões] não mos emprestassem, mesmo quando ainda estava a estudar. Fui promovido assim que terminei a licenciatura e nem precisei de ser eu a puxar o tema. Assim que souberam que estava quase a terminar, disseram-me que não queriam que deixasse de trabalhar lá e informaram-me das novas condições, bastante mais vantajosas. Por isso, desde 2005, a minha vida mudou para melhor: passei do T0 que, entretanto, alugara, para uma casa que comprei, remodelei e voltei a vender, com lucro. Melhorei a minha vida económica, tirei a carta, porque passei a ter carro da empresa e, finalmente, estou como gostava de estar: numa casa que desenhei e cuja construção acompanhei. Detesto viver em apartamentos: sinto-me um periquito numa gaiola, com os vizinhos a olharem para mim das outras janelas. (...) Há um empréstimo para pagar ao banco, mas nada que não seja compatível com o que ganho, ou que me impeça de viver a vida. Já passei muitos anos sem dinheiro para quase nada. Agora, não quero viver assim. (V., E13, Julho de 2009)

Pelo que nos revela, percebemos que o V. conseguiu atingir um patamar de conforto que lhe agrada. Embora tenha trabalhado muito para lá chegar, tenha passado por diversos obstáculos, nomeadamente envolvendo discriminação racial, como já relatámos, considera que teve também muita sorte em ter ido trabalhar para aquele *atelier*, onde se mantinha ainda passados oito anos e onde queria continuar. Está feliz por ter, finalmente, uma casa sua, pois afirma, com humor, que num apartamento se sente "um periquito numa gaiola". Por isso, está realizado, profissionalmente, vê-se recompensado, monetariamente e tem uma estabilidade que o tranquiliza, até porque pretende ter filhos e sente que já tem condições para isso. Como nos disse, "não queremos [ele e a namorada] ter imensos filhos, como os nossos pais. Mas gostávamos de ter três e achamos que já temos condições para concretizarmos esse desejo" (V., E11, Julho de 2007).

O que o preocupa, não é a vida dele. O que o fez sentir profundamente desconfortável, foi perceber as dificuldades pelas quais a M. estava a passar, algo

que ela própria também veio a relatar, mais tarde, revelando algum desânimo. Considerava que tinha sido muito ingénua, quando pensou em seguir Medicina.

> O que me chocou, não foi a evolução da minha vida. Essa, até é bem melhor do que alguma vez sonhei, quando estava na escola secundária. Mas continuo muito amigo da M. e vê-la a ter turnos tão complicados, horários tão cansativos, a viver sozinha, fora de Lisboa, e com um salário tão baixo, deixa-me angustiado. Os pais, tentam ajudá-la e dizem-lhe que sabiam que o início profissional leva tempo e é preciso ter paciência. Mas ela vê-se a fazer a volta ao mundo dos hospitais, porque eles são colocados fora de Lisboa, e não se sente bem, já adulta, licenciada, por ter de continuar a ter ajuda dos pais para conseguir alugar um apartamento pequeno, comer e vir a Lisboa, quando consegue. O namorado, que também é médico, trabalha noutra cidade e, com os horários deles, mal se conseguem encontrar e ela quer tanto casar e ter uma família... Vi-a cansada e preocupada e eu fiquei a matutar: como a vida dá tantas voltas!... (V., E13, Julho de 2009)

O V. apercebeu-se, agora, de como a vida profissional deles é diferente. Ao contrário do que ele esperava, não é ela que ganha um elevado salário, ou que tem uma vida fácil e desafogada. Os médicos, no início de carreira, podem ter de trabalhar deslocados, o que implica pagarem alojamento, gastarem mais dinheiro para virem, de vez em quando, a casa, terem horários muito sobrecarregados e, simultaneamente, gerirem a vida financeira, tratarem da casa e ocuparem-se do quotidiano. Agora, é ela que tem instabilidade profissional – muda de hospital, ainda lhe falta a especialização, não sabe onde irá trabalhar, no futuro – e é ele que se sente mais tranquilo, com um emprego que não é precário, onde gosta do ambiente de trabalho. É ele que tem o sonho de ter filhos e acha que já tem condições para o realizar e ela que se sente a adiar o mesmo sonho. É ela que está cansada, às vezes desanimada. Por isso, como o V. diz: a vida dá muitas voltas.

A M. também nos disse que se sente exausta e sem saber bem se fez a opção certa, quando escolheu Medicina. Vê quem tirou outros cursos, mais curtos, com melhores salários para recém-licenciados, a começar uma vida autónoma, economicamente, e ela não sabe quando o conseguirá fazer. Mas, sobretudo, quer muito casar e ter filhos e não sabe quando conseguirá concretizar isso, nem como

conseguirá conjugar ser médica e mãe pois, como ela afirma, "ter filhos parece uma miragem".

> Já estamos no verão de 2009 e eu desespero, porque nunca mais vejo a minha vida profissional estabilizar. Nunca pensei que ser médica fosse ter um emprego tão precário... [diz, desanimada]. Os outros vão de férias e eu tenho de ficar a trabalhar todo o verão. Os mais novos não podem escolher férias no verão. Depois, em Setembro, mudo novamente de hospital, mas ainda nem sei para onde vou. E começa tudo de novo: procurar casa, conhecer novas pessoas, ver que chefe de serviço me calha na rifa, qual o estilo do serviço onde vou trabalhar, estar sujeita a diversos tipos de discriminação de género... ou outras coisas mais desagradáveis...
>
> Na escola e na faculdade sentia-me uma privilegiada. Mas agora, parece que tirei um curso e estudei imenso, para ter piores condições de vida. Acho que fui muito ingénua, quando escolhi Medicina... Eu esperava que os meus pais me pagassem os estudos, até me podiam ajudar em algumas coisas, depois. Mas não ganhar o suficiente para pagar as minhas despesas, agora, nem saber quando isso vai acontecer, é frustrante. Olho à volta, e vejo a vida dos outros a avançar e a minha parece que não sai do mesmo sítio, ou até regrediu... Mal vejo o meu namorado, não sei quando conseguiremos casar, porque não me quero casar e viver cada um na sua cidade. Ter filhos parece uma miragem... (M., E13, Julho 2009)

A M. tinha expectativas muito elevadas em relação ao que seria ser médica. Contava ter de trabalhar muito, no curso, e depois, no hospital. Mas esperava conseguir ser economicamente independente, depois de se licenciar. Sabia que teria de trabalhar por turnos, mas não imaginava como se sentiria exausta com os horários que tinha de cumprir, nem tinha contado com a mudança de hospital, que a levava a ter muitas tarefas quotidianas para fazer, cada vez que mudava de cidade, com as despesas inerentes que isso acarreta. Como, desde que se licenciou, ela trabalhou um ano em cada hospital e cidade, não chega a fazer amigos e isso também não a ajuda a sentir-se melhor. Para além disso, ela e o namorado estão colocados em cidades diferentes, o que dificulta os encontros, pensarem em casar ou em ter filhos. Portanto, enquanto o V. tem a sensação de ter progredido,

de estar melhor do que alguma vez imaginou, a ela parece-lhe ter regredido e começa a questionar se fez a escolha mais adequada, profissionalmente.

O que vemos, neste momento das trajectórias de participação ao longo da vida do V. e da M., é que os conflitos entre as diversas *I-positions* do V. se acalmaram. Aquilo que ele é como colega de trabalho, profissional, amigo (mantém os amigos da escola secundária e considera os patrões dois novos amigos), namorado, até como filho e irmão, não lhe causa sofrimento, nem o faz pôr em causa as decisões que tomou. A família, que não apoiava que ele tirasse um curso superior, como ele foi ajudando, monetariamente, os irmãos mais novos a estudarem, acabou por aceitar as opções dele, o que o fez voltar a participar em alguns momentos festivos, como os aniversários e algumas festas no bairro. Ajudou, monetariamente, os pais, a darem uma entrada para uma casa e, agora, vivem melhor. Portanto, no V. vemos um apaziguamento, até um certo alívio, por ter visto as decisões que tomou, e de que ele tinha duvidado tanto, levarem-no a uma vida de que gosta.

Com a M., vemos o contrário. Ela viveu a vida escolar, na escola secundária e na faculdade, com bastante tranquilidade. Isso não significa sem esforço, mas as diversas *I-positions*, que constituíam o seu *dialogical self*, não vivenciavam situações altamente conflituosas. A família e amigos apoiavam as suas escolhas, estas correspondiam às expectativas que tinham em relação a ela, os professores admiravam-na e ela sentia-se empoderada. Mas o início da vida profissional trouxe dificuldades e desafios que ela não esperava: alguns conflitos com as chefias e/ou colegas; o desconforto dela, enquanto filha, por já ser adulta e não ser economicamente independente; alguns desapontamentos com alguns amigos e, mesmo, os pais, que não percebiam o desânimo dela. Por isso, tendo sido privilegiada durante a escolaridade, a M. teve mais dificuldades em lidar com a complexidade da vida adulta, nomeadamente profissional, com as frustrações (inesperadas) que esta nova fase lhe trouxe.

Muitos anos depois, ao contrário do que seria de esperar no ensino secundário, quem se sente muito realizado profissionalmente é o V., não é a M. Ela continua a afirmar que adora ser médica, mas não concorda com muito do que é imposto aos médicos, em termos de gestão e organização, por exemplo, terem máximos de exames que podem pedir, nos hospitais públicos, ou terem tão pouco

tempo, para cada consulta, que não chegam a conseguir ouvir atentamente os doentes e acompanhá-los com a qualidade que ela acha que merecem. Como ela afirma, "gostaria de continuar a ser médica, se existisse uma Medicina mais humanizada, pois foi isso que me fez escolher este curso" (M., CI, *e-mail*, Outubro 2022). Ela até esteve disposta a fazer alguns sacrifícios: para ter estabilidade profissional e viver mais próximo do hospital, ela e o marido aceitaram ir trabalhar para o interior. Isso permitiu-lhes comprar um terreno e construir uma casa, cujo projecto o V. lhe ofereceu, dizendo-lhe, com humor: "durante anos, nunca tive dinheiro para te oferecer nada de jeito; agora, ficas com uma casa desenhada por mim... pois desenhar sempre foi o que mais gostei de fazer na vida." (V. e M., CI, relatada pela M., *e-mail*, Dezembro 2014).

Assim, depois de muitos anos que, num *e-mail* deste ano (2024), ela descreve como "com algum sucesso profissional, mas também algumas desilusões", acabou por decidir fazer uma reconversão profissional, que lhe deixa mais tempo para estar com a família nuclear, com os pais e amigos, bem como para ter algum tempo livre. Como nos disse,

> Levei muito tempo a decidir, a admitir que tinha estudado imenso, mas já não me sentia feliz, profissionalmente. A aceitar e assumir que queria mudar de vida...
>
> Sinto-me mais realizada agora, com mais qualidade de vida. Durmo bem, levo os meus filhos à escola, consigo ir sempre aos eventos que a escola organiza nas épocas festivas e no final do ano. Mas, se não fosse o V. e a ajuda que me deu, a estabelecer contactos, a tomar decisões, a analisar tudo com o pragmatismo dele e sem dramatismos, não creio que tivesse conseguido, em tão pouco tempo, começar uma vida tão diferente, como esta que tenho agora, com esta loja de decoração e os projectos de decoração de interiores que faço.
>
> Aquele, que eu não queria para meu par [refere-se às primeiras díades, no 9.º ano de escolaridade], de quem eu desconfiava tanto, acabou por se tornar um dos meus melhores amigos e uma pessoa em que sinto que posso confiar tanto. (M., CI, *e-mail*, Março 2024)

Quando apareceu a pandemia, em 2020, a M. já decidira mudar de profissão. Durante esse período, achou que tinha de ajudar, já que era uma época de

crise na saúde mundial, em que todos os médicos eram necessários. Anteriormente, já se tinha sentido muito desconfortável por haver festas de Natal e de fim de ano, na escola, a que nem ela, nem o marido, conseguiram ir, devido a estarem de serviço. Foram os avós, mas ela sentia-se culpada. Eram conflitos agudos e que lhe provocavam muito sofrimento entre duas *I-positions*: como mãe e como médica. Mas também entre as *I-positions* de filha, médica, esposa, amiga, porque estava de serviço em datas festivas, nos aniversários e outras comemorações. Por isso, aquilo que decidiu foi que, assim que terminasse a pandemia, se demitia do hospital e mudava de vida, algo que fez saber no seu serviço, para que se pudessem organizar contando com isso.

Na preparação desta mudança, teve a oposição dos pais, que achavam um disparate ela deixar de ser médica e escolher algo menos interessante e prestigiado, socialmente. Mas ela tinha visto o V. fazer escolhas com que a família não concordava e, alguns anos depois, a família acabar por achar que ele tinha tomado uma decisão acertada. Por isso, falou com o V., analisou com ele diversas possibilidades, aprendeu muito com a experiência de vida que ele tinha e acabou por se dedicar a algo de que sempre gostara muito, que fazia na sua casa e nas de amigos, mas que nunca encarara como uma possibilidade profissional. Os pais, que a princípio não concordaram, agora vêem-na mais feliz, mais tranquila, com mais tempo para a família, eles incluídos, e acabaram por perceber que ela tinha feito a escolha certa. Por isso, ela afirma que está mais leve, mais alegre e gosta mais da vida que tem agora.

O excerto seguinte, mostra o que aconteceu ao V. e como ele se sente na sua vida. Reconhece, numa conversa informal recente, em que nos contactou por iniciativa própria, que atingiu um equilíbrio que lhe permite ser solidário para com os outros, nomeadamente os que perderam os empregos, durante a pandemia. Também revela outros pontos muito relevantes para ele: (1) tem uma vida pessoal equilibrada e que lhe agrada, com três filhos, como desejavam; (2) apesar de ter tido de se afastar do bairro, quando decidiu tirar um curso superior, agora tem uma grande parte da família a viver no mesmo país para onde ele emigrou, quando houve a crise económica em Portugal; (3) sente-se muito realizado profissionalmente; (4) gosta da socialização alargada que estabeleceu, no país onde

vive e em Portugal, quando vêm de férias; e (5) conseguiu ser solidário numa época complicada, como a pandemia, algo que, para ele, é importante.

> Gosto do equilíbrio que tenho na vida pessoal, com a minha mulher e os meus três filhos, de ter muitos dos meus irmãos a trabalharem comigo, depois de terem tirado um curso, ou a viverem aqui [está há 10 anos a viver no estrangeiro]. A minha mãe vive entre cá e Portugal e gosta da vida que tem, cá e lá. Sinto-me realizado com o sucesso profissional que fui tendo, com a equipa que trabalha comigo e que eu construí, com as pessoas que fazem parte do meu círculo de amizades, com a possibilidade que tive de ajudar alguns colegas e amigos, a quem arranjei emprego aqui, quando eles perderam tudo, com a pandemia. Alguns até tinham ficado sem casa, pois já não conseguiam pagar a renda. Quando percebi a estabilidade que a minha vida tinha, o privilégio de estar a viver num país sem crises económicas e de ter uma profissão em que não perdi o emprego, quando vejo como gosto da vida que tenho, acho que fico em paz. Percebo que lutei muito, mas valeu a pena. (V., CI, *e-mail*, Março 2023)

Este excerto, em que ele identifica como se sente realizado nos diferentes contextos mostra como, passados cerca de 27 anos, o V. sente que fez as escolhas adequadas, para ter a vida que desejava e se sentir realizado. Mas, tanto este como os excertos anteriores, iluminam a amizade profunda que ainda mantém com a M. e, para além disso, os contactos que mantém com antigos colegas e amigos, que ajudou numa época complicada, em que muitos perderam o emprego ou mesmo a casa. Ter conseguido ser um elo de ligação entre eles e as possibilidades de emprego que encontraram, no país onde vivia, mostra que o trabalho colaborativo e dialógico deu frutos, que vão muito além do que inicialmente tínhamos previsto. A estabilidade, no tempo e no espaço, dos laços que os alunos criaram durante a participação no projecto IC, é algo que não deixa de nos surpreender e que lhes permitiu ultrapassarem muitas das dificuldades com que se confrontaram, já na idade adulta.

Díade 2 – Tatiana e Tomás: Discriminação cultural, de género, empowerment e resiliência

A Tatiana e o Tomás frequentavam a mesma escola que o V. e a M., mas participaram no projecto IC posteriormente. Eram alunos de uma turma leccionada por uma professora/investigadora com muitos anos de serviço, o que lhe permitia já ser de Quadro de Escola. Frequentaram esta turma do 7.º ano de escolaridade (1999/00) ao 9.º ano de escolaridade (2001/02), ou seja, durante todo o 3.º ciclo do ensino básico. Anteriormente, a escola já desenvolvera diversas dinâmicas regulatórias de participação Escola/Família (César, 2013b) e promovia a mediação cultural bi-unívoca (César, 2017). Esta forma de funcionamento tinha profundos impactes no sucesso escolar e nas trajectórias de participação ao longo da vida dos alunos, visíveis sobretudo através do *follow-up*. Para além disso, o projecto IC era conhecido, pois tinha contribuído para aumentar o sucesso escolar. Portanto, as turmas que percebiam, na primeira semana de aulas, que participavam no IC, estavam expectantes, para ver o que aconteceria.

A primeira semana de aulas: Conhecer melhor a Tatiana e o Tomás

Quando lhes pedimos, na TIP1, para "desenhar ou escrever o que é para ti a Matemática", o Tomás optou por escrever: "É uma disciplina muito importante, fundamental em estudos científicos, no secundário, e conta muito para entrar em cursos de ciências, que têm médias altas. É uma disciplina importante para mim e gostava de ter Nível 4 ou 5." (Tomás, TIP1, Setembro 1999). A Tatiana desenhou um bicho-de-sete-cabeças e escreveu "A Matemática é complicada e eu tenho dificuldade." (Tatiana, TIP1, Setembro 1999). O Tomás mostra uma representação social positiva da Matemática, que associa a uma disciplina e não a uma área de conhecimento. Reconhece a sua importância para os cursos de Ciências e afirma que gostava de obter melhores classificações. A Tatiana revela uma representação social negativa, simbolizada por um bicho-de-sete-cabeças, um desenho que aparece com frequência, entre alunos que sentem dificuldades em aprendê-la (Machado, 2011; Machado & César, 2012, 2013; Piscarreta, 2002;

Piscarreta & César, 2004). Para além disso, também revela uma representação social negativa dela, enquanto aluna, afirmando que tem dificuldade em aprender Matemática. Esta representação social negativa foi configurada pelas suas experiências anteriores, como ela veio a compreender mais tarde, quando analisou a sua trajectória de participação ao longo da vida, nas entrevistas em que participou e nas conversas informais que iniciou, com a coordenadora do IC.

As respostas ao Q1 permitiram confirmar que a Tatiana tinha uma representação social negativa dela, enquanto aprendente de Matemática. Achava que "tenho Nível 3 porque sou sossegada e me esforço, mas acho que não sou boa a Matemática" (Tatiana, Q1, Setembro 1999). Apesar disso, tanto ela como o Tomás reconheciam que a Matemática é importante, o que revela uma representação social positiva desta disciplina e domínio de conhecimento. Ele, porque "é uma disciplina importante para conseguir média para entrar num curso de ciências" (Tomás, Q1, Setembro, 1999) e ela "porque é precisa para muitas coisas na vida, como gerir o dinheiro em casa" (Tatiana, Q1, Setembro 1999). É interessante notar que o Tomás considera a Matemática como uma disciplina, enquanto a Tatiana menciona uma área do conhecimento. Esta dupla utilização do termo Matemática já tinha sido explorada por Santos e Ferreira (2023), que realçam que ela nem sempre está clarificada na investigação, ou nos discursos dos participantes, nomeadamente dos professores, alunos e seus familiares.

A análise do Q1 também mostrou que os pais do Tomás tinham ambos cursos superiores e os da Tatiana tinham frequentado a escola primária (actual 1.º ciclo do ensino básico), que ele concluíra e ela não. O Tomás pretendia tirar um curso superior na área de Ciências e preocupava-o ter Nível 3 a Matemática, porque as médias de entrada, nesses cursos, eram elevadas (em Portugal existe *numerus clausus*). A Tatiana tinha ficado retida no 2.º ano de escolaridade, pois iniciara o 1.º ano de escolaridade, onde aprendem a ler e a escrever em português, só sabendo crioulo. Pensava terminar o 9.º ano de escolaridade e começar a trabalhar. Já tendo reprovado um ano, teria 16 anos no final desse ano lectivo, a idade mínima, por lei, para se poder trabalhar, em Portugal. Segundo ela, "vou trabalhar depois do 9.º ano porque o dinheiro faz falta lá em casa, somos muitos irmãos" (Tatiana, Q1, Setembro 1999). Para o Tomás, a Matemática não estava entre as disciplinas de que gostava mais, nem nas que gostava menos. Para a

Tatiana, era a de que gostava menos e achava-a difícil. O Tomás tinha Nível 3 e nunca tinha tido negativas nos testes de avaliação, atingindo mesmo Nível 4 em alguns deles, enquanto a Tatiana tinha Nível 3 e já tinha obtido algumas negativas, "embora a média dos testes fosse 3" (Tatiana, Q1, Setembro, 1999). Portanto, ele desejava atingir Nível 4 ou Nível 5, no final dos períodos, enquanto ela só queria manter o Nível 3, pois considerava-se "uma aluna fraca" (Tatiana, Q1, Setembro 1999).

O IACC revelou que o Tomás e a Tatiana eram capazes de mobilizar capacidades e competências complementares, algo que se pretendia quando se formavam as díades. A insegurança da Tatiana está patente logo na Tarefa A: ela desenha dois chocolates, de forma bastante rigorosa e criativa (ex: cores diferentes, para cada um dos bocados de cada chocolate, que representam o que se comia), sendo evidente que os chocolates são do mesmo tamanho, mas estão divididos, um deles, em 20 bocados e, o outro, em 25. A partir desta representação gráfica, para explicar o que desenhou, escreve uma pequena composição matemática, explicitando que houve um aumento de assaltos. Porém, como não acredita que "desenhar seja Matemática, que se possa fazer assim nas aulas de Matemática, para resolver um exercício" (Tatiana, CI, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 1999), risca esta resolução.

A professora/investigadora, que ia passeando pela sala, sem se deter junto de nenhum aluno, anotava mentalmente algumas estratégias de resolução, que lhe pareciam interessantes. Depois, quando se sentava na secretária, escrevia algumas delas, numa folha de papel, esboçando os desenhos ou os cálculos, para mais tarde as observar e analisar, nas folhas de resposta. Posteriormente, também as anotava nas fichas individuais de cada aluno, elaboradas por ela, para ver a sua evolução, e/ou escrevia alguma entrada no seu diário de bordo (DB). No caso da Tatiana, foi particularmente importante que ela tivesse esboçado a estratégia de resolução que esta aluna usara, porque a folha de resposta estava tão riscada, que era difícil perceber o que desenhara. Daí que, na Figura 72, esteja reproduzido, em computador, o que a Tatiana escreveu no quadro, quando, na 2.ª aula (as aulas eram de 90 minutos), durante a discussão geral do IACC, foi explicar a estratégia de resolução que tinha elaborado.

Tal como sucedera com o V., também a Tatiana nos confidenciou, numa conversa informal, que não costumava comer chocolates, porque "lá em casa não há dinheiro para doces" (Tatiana, CI, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 1999). É interessante ver como estes alunos, que não contactavam com este tipo de bens no quotidiano, são capazes de recorrer a eles, numa aula de Matemática. Revela que conseguem pensar matematicamente, utilizando metáforas e estabelecendo conexões entre a vida real e a Matemática escolar. Ao preferir um raciocínio geométrico e uma estratégia de resolução por representação gráfica, a Tatiana precisava de um modelo gráfico e, adorando chocolates, como nos revelou, apesar de não os poder comprar e comer, a primeira metáfora em que pensou foi esta, o que revela bastante criatividade.

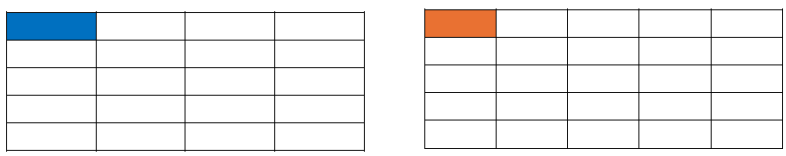
Na discussão geral (2.º dia de aulas), em que todos os alunos foram ao quadro explicar uma estratégia de resolução interessante e bem-sucedida, pedimos à Tatiana que escrevesse e explicasse o que tinha riscado. Espantada, por acharmos que valia a pena os colegas registarem uma representação gráfica (desenho) como estratégia de resolução, começou por hesitar e olhar para a professora/investigadora com um ar aflito. Mas, como esta lhe disse que aquela maneira de resolver o problema era única e muito interessante, sendo importante os colegas verem-na, ela sorriu, levantou-se, dirigiu-se ao quadro e desenhou os dois chocolates, enquanto explicava o que estava a desenhar e como tinha pensado. Realçou detalhes que revelam o rigor matemático do raciocínio e estratégia de resolução, como que era essencial que os chocolates fossem do mesmo tamanho e que pintar o bocado de cada um deles que se comia ajudava a "ver melhor" (expressão que usou) qual era o chocolate em que se comia mais. Também afirmou que, apesar de ter escrito "quadradinhos", referindo-se aos bocados de chocolate, sabia que tinha desenhado rectângulos e não quadrados. Mas, na vida quotidiana, designam-se por "quadradinhos de chocolate" e ela usou essa expressão. Portanto, teve o cuidado de explicitar que não era por ignorar as figuras geométricas que tinha escrito "quadradinhos". Por último, acrescentou, oralmente, depois de desenhar e escrever: "Se eu como mais quando divido o chocolate em 20 bocados, isso quer dizer que há mais assaltos quando é 1 em 20 casas assaltadas" (Tatiana, O, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 1999). O que ela explicou, bem como o que acrescentou oralmente, ilumina a importância

da discussão geral e mostra como esta constituía um mecanismo de *inter-empowerment*, contribuindo para a aprendizagem, o desenvolvimento e para aumentar a auto-estima positiva da Tatiana, enquanto aprendente de Matemática. Também ilustra como a participação nas discussões gerais é importante para expandir as interpretações e resoluções que os alunos tinham feito, quando respondiam ao IACC, pois aqui ela explicitou mais claramente a passagem da metáfora dos chocolates para os dados do problema, que se referiam a assaltos.

O que desenhou e escreveu no quadro, durante a discussão geral do IACC, está ilustrado na Figura 72. Como tinha riscado a resolução na folha de respostas, não a chegou a terminar, pelo que esta não estava tão completa como o exemplo que consta da Figura 13, que acima apresentámos e discutimos. Se ela tivesse acreditado que desenhar era uma forma legítima de resolver a Tarefa A, é bastante provável que tivesse escrito uma resposta final, pois era muito empenhada e era habitual fazer isso, como observámos depois, nas aulas em que se começaram a estudar os conteúdos programáticos do 7.º ano de escolaridade.

Figura 72

Tarefa A – Resolução da Tatiana – L1: crioulo



Chocolate dividido em 20 bocados

Chocolate dividido em 25 bocados

"Se dois chocolates iguais estiverem divididos em 20 e em 25 quadradinhos, e eu comer 1 quadradinho de cada, como mais no que tem 20 quadradinhos"

A Tatiana recorre a uma abordagem global do problema, um raciocínio geométrico e uma estratégia de resolução por representação gráfica, que complementa com uma pequena composição matemática. Segundo a meta-análise que fizemos usando todos os dados do IACC (César, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b), esta é a abordagem, raciocínio e estratégia de resolução preferidas pelos alunos cuja L1 é o crioulo, uma língua ideográfica. Habitualmente esta estratégia de resolução por representação gráfica (desenhos) não é aceite nas aulas.

Por isso, os alunos cuja L1 é o crioulo vivenciam uma discriminação negativa das formas naturais de fazerem e aprenderem Matemática, o que os prejudica. Se aceites, eles conseguem, depois, aprender outras abordagens, raciocínios e estratégias de resolução, como assinalaram César (2009, 2013a, 2013b, 2017, 2024b), e César e Machado (2024a, 2024b), incluindo as mais formais, o que facilita o acesso ao sucesso académico.

O Tomás não revelou sentido crítico e, na sua composição matemática, abaixo transcrita, repetiu os dados do enunciado, que tinham imprecisões matemáticas, que ele não conseguiu identificar: (1) não percebeu que uma em 20 casas assaltadas é superior a uma em 25; (2) não se apercebeu de que os assaltos tinham aumentado em vez de terem diminuído, como afirmava o texto; e (3) não identificou que uma em 20 casas assaltadas não corresponde a 20%.

> O ano passado 1 em 25 casas foram assaltadas. Este ano, a polícia trabalhou bem e foi apenas 1 casa em 20. Como diz a notícia, houve um decréscimo grande, mas 20% de assaltos, ainda é muito e é precisam que diminuam mais. (Tomás, IACC, Setembro 1999)

O que ele nos revelou, depois, numa conversa informal, no final da discussão geral do IACC, foi que "pensei que, se estava no jornal, era verdade... e repeti o que estava escrito... mas é preciso ler com atenção, pois há notícias falsas e temos de ser leitores críticos, não nos deixarmos enganar..." (Tomás, CI, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 1999). Estava visivelmente satisfeito com esta aprendizagem, porque acrescentou, com um sorriso: "Esta aula foi importante. Aprendi muitas coisas novas de Matemática. Mas, sobretudo, aprendi a ser mais cuidadoso com o que leio, a não acreditar em tudo. Isso é importante, para o futuro, mesmo fora da escola." (Tomás, CI, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 1999). Este é outro aspecto fundamental para a equipa do projecto IC: que as aprendizagens sejam úteis e susceptíveis de serem mobilizadas noutros contextos, cenários e situações, que a aprendizagem da Matemática também desenvolva capacidades e competências como o sentido crítico, a capacidade de análise, a criatividade ou a argumentação, que facilitam

as conexões com a vida real. Isto significa que, na escola e na Educação Matemática, em geral, se fomente um paradigma de Matemática crítica que, como Frankenstein (1983, 2012) e Skovsmose (2022, 2023) realçam, permite formar cidadãos mais participativos, conscientes e críticos, mais susceptíveis de tomarem decisões informadas.

Quando a Tatiana acabou a explicação dela, no quadro, durante a discussão geral, o Tomás comentou, com o colega com quem partilhava a mesa, nesse dia: "desenhar os chocolates para representar os assaltos e as casas, ajuda mesmo a ver. Agora, percebi que uma em 20, se pode escrever em fracção, porque é um bocado do chocolate... e, depois calcula-se a percentagem" (Tomás, O, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 1999). Este comentário revela que o Tomás conseguiu estabelecer uma conexão entre a estratégia de resolução por representação gráfica, que a Tatiana preferia e usara, e uma estratégia de resolução aritmética, recorrendo a fracções. Assim, conseguiu estabelecer uma conexão entre o raciocínio geométrico, dela, e um raciocínio analítico, que era preferencial para ele, cuja L1 era o português. A professora/investigadora, que estava atenta à conversa do Tomás e do colega de mesa, sugeriu-lhe que fosse ao quadro e calculasse a percentagem. O Tomás escreveu:

$$\frac{1}{25_{(4)}} = \frac{4}{100} \text{ que é } 4\%$$

$$\frac{1}{20_{(5)}} = \frac{5}{100} \text{ que é } 5\%$$

> R: Os assaltos passaram de 4% para 5%. Logo, aumentaram. Por isso, a notícia tem informação errada, é um jornal com pouca qualidade.

Como acontecia na maioria das turmas, a Tarefa A era aquela que menos alunos resolviam de forma completa e bem justificada. Daí que fosse importante, na discussão geral, explorar todas as estratégias de resolução que mostravam que os assaltos tinham aumentado. Depois, como aconteceu nesta turma, era frequente ouvirem-se comentários que já analisavam criticamente as percentagens.

A partir das representações gráficas desenhadas no quadro, alguns alunos, que não tinham mobilizado o sentido crítico, já eram capazes de calcular as percentagens, como aconteceu com o Tomás, começando a desenvolver esta competência. Nesta turma, sucedeu algo enriquecedor: quando viu a maneira do Tomás calcular as percentagens, a Ana S. disse: "eu calculei as percentagens de outra maneira, depois de ver o desenho dos chocolates, mas, como ambos acertámos, deu-me o mesmo resultado. Posso ir lá [refere-se ao quadro] mostrar?" (Ana S., O, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 1999), ao que a professora/investigadora respondeu afirmativamente. No quadro, a Ana S. escreveu:

> $\frac{1}{25} = 0.04$ [Disse: quatro centésimas, que corresponde a 4%]
> [Mas como viu caras aflitas ou espantadas, explicou, apontando: unidades, décimas, centésimas. Centésimas, vem de cem. Portanto, são 4%. E esperou um bocadinho, para os colegas registarem, por escrito, e interiorizarem o que ela tinha dito]
> Vou continuar, disse, num tom pedagógico:
>
> $$\frac{1}{20} = 0.05$$
>
> Ana S. – Quantas centésimas são?
> Turma [em coro] – Cinco, e isso são 5% [acrescentaram alguns alunos]
> (Ana S., O, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 1999)

> E ali estava uma turma com muitos alunos que tinham tido negativa a Matemática em anos anteriores, onde muitos alunos achavam que eram muito fracos ou fracos, mas que estavam todos a trabalhar, a registar por escrito, a tentar participar. Algo tinha mudado, apenas em duas aulas, quanto à participação dos alunos e à sua confiança neles e nas suas capacidades. (Professora/investigadora, O, registada no DB, Setembro 1999)

Este episódio é ilustrativo de mudanças importantes: (1) todos os alunos estão a trabalhar, logo na 2.ª aula de Matemática, registando o que os colegas escrevem no quadro; (2) estão atentos e a tentar compreender abordagens, raciocínios e estratégias de resolução diferentes, o que enriquece as aprendizagens de cada aluno; (3) respeitam e valorizam os contributos dos diversos colegas,

incluindo os que habitualmente não participavam nas aulas de Matemática e obtinham níveis negativos, em anos lectivos anteriores; (4) nenhum se negou a participar e, para os mais inseguros, bastou a professora/investigadora sorrir e estender-lhes a folha de respostas deles (IACC), para que se levantassem e fossem ao quadro; (5) sentem-se suficientemente confiantes para levantarem a mão e completarem algo que um colega tinha dito, ou sugerirem ir ao quadro mostrar uma resolução diferente, revelando que já estão a negociar, com a professora/investigadora, um novo contrato didáctico inovador; (6) notava-se o prazer com que estavam a aprender e a participar; e (7) a mensagem implícita, um primeiro mecanismo de *inter-empowerment*, de que todos conseguiam fazer e aprender Matemática, estava a funcionar e a ser interiorizada por eles. Este último ponto era essencial para que os mecanismos de *inter-empowerment*, que a professora/investigadora usava, fossem internalizados pelos alunos, passando a mecanismos de *intra-empowerment*, que eles conseguiriam, depois, usar de forma autónoma, noutros contextos, cenários e situações. Na vida escolar, profissional, pessoal e social, os mecanismos de *intra-empowerment* são fundamentais, pois permitem ultrapassar barreiras, sobreviver às adversidades e continuar a investir numa trajectória de participação ao longo da vida que lhes agrade, que lhes permita sentirem-se realizados.

É importante salientar que a discussão geral era cuidadosamente preparada, incluindo em termos espaciais, quando os professores participavam em cursos e acções de formação, que os preparavam para fazer parte da equipa do IC e para saberem trabalhar segundo as regras deste novo contrato didáctico, baseado em trabalho colaborativo e dialógico. Quando se recorria a um contrato didáctico dito tradicional, era frequente os professores estarem junto ao quadro, quando algum aluno ali estava a resolver uma tarefa. Por isso mesmo, faziam comentários em voz baixa, que nem toda a turma conseguia ouvir, contribuindo para que alguns alunos estivessem pouco atentos. Para além disso, muitas vezes eram os próprios professores que escreviam no quadro complementos de informação necessários, ou que emendavam resoluções, ou parte delas, quando estas não tinham sido bem-sucedidas. Esta forma de actuação tinha subjacente mensagens implícitas que não queríamos transmitir no projecto IC, como que só o professor conseguia resolver as tarefas de forma adequada e completa, não acreditando nas

capacidades e competências dos alunos. Por último, estes procedimentos não promoviam a autonomia dos alunos, nem o aprender a aprender.

Pelo que foi dito, o cenário da discussão geral foi cuidadosamente pensado no projecto IC. Era discutido através da análise de vídeos e da simulação de *role-playing*, configurando aprendizagens que os professores interiorizavam e conseguiam pôr em prática. Porque se pretendia fomentar uma auto-estima positiva, na discussão geral do IACC os alunos ainda podiam levar a folha de respostas. Tratava-se, para muitos deles, de uma primeira vez a estar, perante a turma, a explicar uma estratégia de resolução que tinha sido bem-sucedida e, para os mais inseguros, isso era importante. Porém, nas aulas seguintes, eles íam ao quadro sem levarem qualquer folha e percebiam isso como confiança do professor/investigador nas suas capacidades e competências. Se necessário, era dito "tenho a certeza que tu sabes explicar" ou "se tiveres alguma dúvida, podes perguntar aos teus colegas". Portanto, criava-se um clima de sala de aula calmo, seguro e colaborativo.

Para conseguir que falassem num tom de voz que todos conseguissem ouvir, o professor/investigador estava em pé, ao fundo da sala. Assim, se ele ouvisse o que o aluno que estava no quadro explicava, também todos os colegas conseguiam ouvir, o que contribuía para que estivessem atentos e a registar o que era escrito no quadro. Se o professor/investigador fizesse alguma pergunta ou comentário, também todos conseguiam ouvir. Isto era bem mais exigente para os professores/investigadores: eles não sabiam, antecipadamente, que dificuldades poderiam surgir e que comentários teriam de fazer. Mas tinham de conseguir fazer progredir a resolução, se isso se revelasse necessário, sem irem eles ao quadro escrever. Portanto, também eles estavam a desenvolver capacidades de observação, análise e intervenção. Para além disso, estando ao fundo da sala, observavam melhor o que acontecia, pois visualizavam toda a turma e este posicionamento, em que os alunos percebiam que estavam a ser observados, evitava diversas questões de indisciplina. Por último, os alunos percebiam que o professor/investigador estava interessado e atento, mesmo estando longe do quadro e tendiam a aprender com este modelo, estando também eles próprios a registar o que era escrito e a participar na discussão geral, quando isso se justificava.

Portanto, algo que parece tão simples como onde está, espacialmente, o professor/investigador, durante a discussão geral, tem impactes significativos nos alunos.

Mais uma vez, as mensagens implícitas eram importantes. Ao não estar junto do quadro, mas revelando curiosidade e interesse, o professor/investigador mostra que confia neles, nas suas capacidades e competências. Isso promove a auto-estima académica positiva e o empoderamento. Também contribui para a criação de um espaço de pensamento (Perret-Clermont, 2004), pois os alunos sabem que podem questionar colegas, se tiverem alguma dúvida, ou se se aperceberem, pelas caras deles, quando explicam algo que já escreveram, que os colegas não estão a perceber aquela parte da resolução. Por isso, também trabalha a autonomia, o aprender a aprender e fomenta o diálogo intercultural, pois são geralmente os que têm abordagens, raciocínios e estratégias de resolução preferenciais diferentes que precisam de explicações complementares, ou levantam questões. Pelo que foi dito, as discussões gerais são momentos muito importantes de aprendizagem, mas precisam de ser cuidadosamente preparadas, incluindo do ponto de vista espacial e quanto à forma de actuação dos professores/investigadores e dos alunos.

Na Tarefa B (Figura 18), que avaliava a intuição matemática, a criatividade e a persistência na tarefa, o Tomás mostrou não ter intuição matemática, mas ter persistência na tarefa e resiliência, enquanto a Tatiana revelou intuição matemática e criatividade. Como realçam César e Machado (2024a), quando analisaram a totalidade dos dados do IACC, "a intuição matemática não é configurada pelo tipo de raciocínio ou de estratégias de resolução utilizados" (p. 185), havendo uma percentagem semelhante, de alunos cuja L1 é o crioulo e cuja L1 é o português, que revelam ser capazes de a mobilizar. No entanto, os alunos cuja L1 é o crioulo tendem a preferir estratégias de resolução por representação gráfica (ex: desenhos das canecas, movimentos representados através de setas e/ou ver-se o leite a ser deitado na outra caneca). Aqueles cuja L1 é o português, ou outra língua fonética, preferem escrever pequenas composições matemáticas (ex: Tomás), descrevendo todos os movimentos, ou recorrer a uma estratégia de resolução aritmética, indicando, implicitamente, os movimentos através das operações elementares da aritmética, como em alguns exemplos acima citados, ou

analisados por César e Machado (2024a). De realçar que a persistência na tarefa é mais frequente quando a L1 é o português ou outra língua fonética, mas a criatividade é mais comum naqueles cuja L1 é uma língua ideográfica, como o crioulo. Mais uma vez, é nítida a importância de estimular os alunos a partirem das abordagens, raciocínios e estratégias de resolução que lhes são naturais e, depois, na discussão geral, confrontar diversas estratégias de resolução, para que eles possam interessar-se por aprender outras.

Figura 73

Tarefa B – Resolução da Tatiana – L1: crioulo

Isto é como eu penso e gosto de fazer. Mas em Matemática fazemos com contas:

$$3 + 3 = 6 \qquad 6 - 5 = 1$$

Ele enche a caneca de 3 l duas vezes. De cada vez, deita o leite [que está na de 3 l] na de 5 l. No final, ele tem 1 l na caneca de 3 l.

R: Pode vender 1 l que está na caneca de 3 l.

Na Tarefa B (Figura 18), a Tatiana voltou a preferir uma estratégia de resolução por representação gráfica (Figura 73), semelhante à utilizada na Figura 26, mas mais completa, pois complementou-a com uma estratégia de resolução aritmética e uma pequena composição matemática, uma vez que não acreditava que "desenhar canecas fosse fazer Matemática" (Tatiana, CI, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 1999). Revelou, mais uma vez, rigor, atenção aos detalhes e criatividade. Desenha a caneca de 3 l, inclinada, a ser esvaziada para a caneca de 5 l, que está na vertical (vê-se o líquido a fazer esse

percurso), tendo escrito a capacidade de cada caneca no seu exterior. Repete este desenho e usa um sinal de adição (+), para indicar que faz isto duas vezes. Depois, desenha uma seta e, a seguir, aparece a caneca de 3 l, na vertical, com a sua capacidade indicada no exterior. O líquido vai até uma determinada altura, aproximadamente um terço da capacidade. Na zona com líquido escreveu 1 l. Por fim, para que tudo fique bem clarificado, escreveu "sobra 1 l", tendo posto um rectângulo a realçar essa expressão. Portanto, trata-se de uma representação gráfica muito detalhada, muito cuidadosa em relação aos pormenores, o que contraria a impressão de alguns professores, de que os alunos cuja L1 é o crioulo "desenham tipo brincadeira", ou "para se divertirem", como ouvimos várias vezes, em conversas informais. Uma aluna que faz uma representação gráfica com este rigor, esteve muito atenta aos dados do problema, interpretou-os facilmente e respeitou o que era pedido, ou seja, os constrangimentos citados no enunciado. Para além disso, mostra uma capacidade de representação gráfica bastante desenvolvida.

Porém, como já tínhamos visto na resposta à Tarefa A, a Tatiana não acreditava que se pudessem usar desenhos para resolver tarefas, na aula de Matemática. Daí ela ter riscado a sua resolução da Tarefa A. Por isso, na Tarefa B, depois de recorrer a um raciocínio espacial e a uma estratégia de resolução por representação gráfica, acrescentou, como se lê na Figura 72: "Isto é como eu penso e gosto de fazer. Mas em Matemática fazemos com contas". Esta declaração ilumina como o 1.º dia de aulas teve impacto nos desempenhos da Tatiana, pois ela já acreditava que podia afirmar que era assim que pensava e fazia. Só ainda não acreditava que isso fosse Matemática, algo que também tínhamos observado no V. e em muitos outros alunos cuja L1 era o crioulo. Essa desconfiança era o fruto de muitos e muitos anos em que não os tinham deixado recorrer às suas formas naturais de fazer e aprender Matemática, levando-os a terem desempenhos abaixo das suas capacidades e competências. Por isso, a seguir, indica o que desenhou, mas usando adições e subtracções e, depois, escreve uma pequena composição matemática a explicá-las. Por último, como é habitual nas resoluções de problemas, indica a resposta. Isto mostra que a Tatiana conhecia o contrato didáctico dito tradicional (César, 2003, 2009; Schubauer-Leoni, 1986), onde os alunos aprendem a dar respostas aos problemas, mas também sabia que, nesse contrato didáctico, as suas formas naturais de fazer Matemática não eram aceites.

Porém, naquelas aulas, ela reconhecia que as regras do contrato didáctico eram diferentes e, por isso, estava muito empenhada na resolução do IACC, tentando ser rigorosa, detalhada e explicando como pensava, algo que é pedido nas instruções, escritas no início do enunciado. Portanto, mostra que aderiu ao novo contrato didáctico, que a professora/investigadora sugeriu e gostaria que os alunos aceitassem, mesmo que isso ainda não significasse que a sua representação social do que é, ou não, Matemática, tivesse mudado. Modificar representações sociais é um processo lento, como realçava Moscovici (2000) e ilustrou Machado (2011), analisando representações sociais da Matemática.

O Tomás preferiu escrever uma composição matemática, descrevendo os diversos movimentos que seria necessário fazer, até conseguirmos ter apenas um litro de leite para vender à Sr.ª Isaura.

> Pegamos na caneca de 5 l e enchemo-la de leite. Depois, passamos o leite desta caneca para a de 3 l e ficam 2 l na caneca de 5 l. Esvaziamos a caneca de 3 l. Pomos os 2 l que tinham sobrado na caneca de 5 l dentro da de 3 l. Voltamos a encher a caneca de 5 l e pomos leite (1 l) até encher a caneca de 3 l completamente.
>
> [Diz: "Isto nunca mais acaba..." e suspira. Volta a ler o enunciado e fica um bocado a pensar. Decide começar ao contrário].
>
> Escreve:
> Enche a caneca de 3 l e despeja-a na de 5 l, volta a encher a de 3 l e põe na caneca de 5 l. Fica 1 l na caneca de 3 l, portanto pode vendê-lo à Sr.ª Isaura

O Tomás não revelou intuição matemática, pois começou por encher a caneca de 5 l e apenas começou, posteriormente, pela caneca de 3 l porque esta primeira tentativa se revelou muito longa e ele já estava cansado de fazer despejos sucessivos das canecas, sem chegar ao resultado pretendido: 1 l de leite. O seu aborrecimento e frustração vê-se a partir da frase em que diz: "isto nunca mais acaba..." e é reforçado pelo suspiro, suficientemente audíveis, ambos, para a professora/investigadora os ter anotado no diário de bordo (DB). Seria possível,

começando pela caneca de 5 l, ter medido 1 l de leite. Mas teria de fazer muitos movimentos e precisava de ter um recipiente extra, para ir esvaziando o leite que estava na caneca de 3 l. O enunciado do problema não diz se havia recipientes extra. Mas, diversos alunos que começaram pela caneca de 5 l, afirmaram, quando questionados sobre isso, que não era possível que, numa mercearia, não existisse um recipiente vazio, como um balde, um garrafão grande, ou algo onde pudessem deitar o leite sem o desperdiçar (Machado, 2014). Esta explicação é verosímil. Mas um enunciado pode ter condições restritivas que não são as da vida real, precisamente para constituir um desafio matemático. Como o Tomás fez diversos movimentos sem conseguir medir 1 l, começou a ficar cansado e a duvidar que aquele fosse o melhor caminho, o que o fez reler o enunciado, ficar a pensar e começar, depois, pela medida de 3 l, conseguindo obter o resultado desejado. Por isso, não revelou intuição matemática, mas mostrou ter persistência na tarefa e resiliência, sendo capaz de ultrapassar as dificuldades, de não desistir quando foi confrontado com elas.

Na Tarefa C (Figura 30), o Tomás mobilizou o raciocínio concreto (RC), fornecendo uma resposta semelhante à da Figura 35, enquanto a Tatiana recorreu ao raciocínio abstracto (RA), pelo que a resposta dela é como a da Figura 36. Pelas características desta tarefa, em que tinham de desenhar os elementos em falta em dois espaços, a resposta não permite identificar imediatamente o tipo de raciocínio e a estratégia de resolução. Isso só é possível na discussão geral, quando explicam como pensaram, ou através de conversas informais. A Tatiana explicou-nos, numa conversa informal no final da 2.ª aula, que tinha olhado para a figura toda (abordagem global) e se tinha apercebido logo de que faltavam um triângulo e um rectângulo exteriores e que a figura interna era sempre um quadrado. Isto mostra que ela preferia uma abordagem global dos problemas, que correspondia a olhar para a figura toda. Depois, quando quis desenhar estas figuras, reparou que, numa das linhas faltava um rectângulo e na outra um triângulo, ou seja, aqui olhou para cada linha e analisou que tipo de figuras a compunham. Quanto às pintas internas, "eram sempre 1, 2, 3, lendo da esquerda para a direita, como fazemos em português" (Tatiana, CI, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 1999). Convém realçar que, no final da 2.ª aula, depois da discussão geral do IACC, havia 20 minutos de intervalo e quase todos os alunos

ficaram na sala, a falar das resoluções entre eles e com a professora/investigadora. Estavam tão animados, que vários colegas de outras turmas e professores espreitaram à porta, para perceberem o que se passava, pois não era habitual os alunos não saírem para o intervalo e ficarem animadamente a discutir resoluções matemáticas, sobretudo durante a primeira semana de aulas.

O Tomás (Figura 35) disse que, primeiro, tinha desenhado o quadrado interno, porque viu que estava em todos os desenhos e, a seguir, as pintas, que percebeu serem 1, 2, 3 em cada linha. Depois, viu que faltavam um rectângulo e um triângulo exteriores. Porém, como olhou apenas para a coluna (vertical) e não olhou para a linha (horizontal), desenhou-os na posição inversa. Estava um bocado aborrecido, consigo próprio, por "não ter olhado com mais atenção" (Tomás, CI, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 1999). Mas afirmou que, naquela aula, tinha percebido que podia "ter muito melhores notas se desse mais atenção aos detalhes, aos enunciados, se fosse mais crítico, se verificasse tudo... e que ía fazer isso no futuro." (Tomás, CI, registada no DB da professora/investigadora, Setembro 1999), o que volta a iluminar a resiliência e a auto-estima positiva, enquanto aluno, pois estava convencido de que ía conseguir melhorar os desempenhos matemáticos. Assim, "ficar chateado, consigo próprio", como verbalizou, não o bloqueava, levava-o a identificar os pontos que poderia melhorar, para funcionar dessa maneira, no futuro.

A professora/investigadora revelou que, memorizar a maioria dos pequenos diálogos e escrevê-los, logo a seguir, tinha sido complicado, porque havia muitos que eram muito ricos e interessantes. Confidenciou que, como sabia quais os seis alunos que iriam ser entrevistados no *follow-up*, deu particular atenção às suas intervenções e registou-as, assim que eles saíram. Por isso, sabia o que o Tomás e a Tatiana tinham dito. Mas gostaria de ter observadores internos presentes, para conseguir anotar tudo, de cada aluno. Porém, para permitir que a relação professora/alunos fosse mais sólida antes de começarem as observações das aulas, estas não se realizavam tão cedo. Os alunos tinham reagido bem a que usasse um gravador áudio na discussão geral. Quando falava um de cada vez, ela conseguia identificá-los na transcrição escrita dos diálogos. Porém, no intervalo, com muitas conversas simultâneas e bastante ruído de fundo, por vezes isso revelou-se impossível. Estas são vicissitudes de se fazer investigação intercultural

e inclusiva no terreno (Allan & Slee, 2008; César & Ainscow, 2006), em projectos de investigação-acção (Hamido & César, 2009; Mason, 2002), onde acabam por existir situações inesperadas, como esta, em que o entusiasmo, depois da discussão geral do IACC, fez os alunos permanecerem na sala de aula, durante o intervalo, a discutirem diversas estratégias de resolução, a explicitarem pormenores das mesmas, ou a colocarem questões aos colegas e à professora/investigadora. Por isso, o registo escrito dos comentários dos alunos não ficou completo, mas a impressão geral da professora/investigadora é nítida: eles estavam muitíssimo entusiasmados com o que sucedera naquela aula. Isso também nos salientaram outros professores da escola, quando nos relataram este episódio, mostrando o seu espanto por haver alunos, do 7.º ano de escolaridade, tão interessados nas resoluções matemáticas que tinham elaborado.

A Tarefa D (Figura 37) revelava o tipo de raciocínio e estratégia de resolução que os alunos preferiam. A influência da L1 é nítida, apesar de se tratar de uma figura geométrica, na qual precisam de calcular a área da parte pintada, ou seja, um enunciado onde existe uma representação gráfica. Mas, apesar disso, os alunos cuja L1 é o crioulo preferem um raciocínio geométrico e uma estratégia de resolução por representação gráfica, enquanto aqueles cuja L1 é o português preferem um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética ou algébrica, que podem complementar com uma composição matemática (César, 2024b; César & Machado, 2024a). A Tatiana, cuja L1 era o crioulo, decompôs a figura e, depois, calculou a área da parte pintada (Figura 42). Decompõe os losangos em triângulos e arruma-os na metade superior do rectângulo, para mostrar que a parte pintada é metade deste. Assim, vemos que o lado que mede 10 cm, tem pintada uma parte que corresponde a 5 cm. Depois, usa a fórmula da área do rectângulo e calcula o valor da área pintada: 75 cm^2.

Começa por usar uma abordagem global, pois vê a figura como um todo, e um raciocínio geométrico, através do qual decompõe a figura, recorrendo a uma estratégia de resolução por representação gráfica. Desenha novamente a figura arrumando, em posições diferentes, os triângulos que compõem os três losangos. Por último, usa uma estratégia aritmética complementar, para calcular a área. No entanto, esta estratégia aritmética é um mero cálculo auxiliar final. Não é nela que se baseia o seu raciocínio e a resolução. É curioso que, nesta tarefa, ao

contrário do que aconteceu na Tarefa A, ela achou que podia desenhar, que isso seria legítimo, na aula de Matemática. Como nos explicou depois, numa conversa informal, "aqui já havia uma figura desenhada, era Geometria, por isso podia desenhar e depois fazer a conta" (Tatiana, CI, registada pela professora/investigadora, Setembro 1999).

O Tomás utilizou um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução que oscila entre algébrica e aritmética, como se vê na Figura 46. Como explicou na discussão geral, quando foi ao quadro, não se lembrava da fórmula para calcular a área do losango. Mas recordava-se da fórmula da área do triângulo e sabia que o losango era formado por dois triângulos iguais. Por isso, calculou a área de cada triângulo e, depois, multiplicou-a por seis, visto que havia seis triângulos, dois em cada losango. Curioso notar que, apesar de ele dizer que cada losango tem dois triângulos iguais, como prefere um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução algébrica, nunca sente a necessidade de desenhar ou traçar, por exemplo, mostrando que dividiu os losangos ao meio. Assim, a Tarefa D ilustra nitidamente como a L1 configura as formas de raciocínio matemático e as estratégias de resolução preferenciais, como ilustraram César (2024b) e César e Machado (2024a, 2024b). Por isso mesmo, é fundamental que os professores estejam conscientes destas diferenças e que partam dos raciocínios e estratégias de resolução naturais, para cada aluno e, depois, explorem outras usadas por outros colegas, possibilitando que os diversos alunos as aprendam mais facilmente. Este tipo de procedimentos faz com que os alunos se sintam aceites, respeitados e empoderados, algo essencial para promover a equidade, a justiça social e o acesso ao sucesso escolar. A aceitação das formas naturais de fazer e aprender Matemática é um critério fundamental de uma educação intercultural e inclusiva (César, 2009, 2013a, 2014, 2017, 2024a, 2024b; César et al., 2014; César & Machado, 2024a, 2024b).

Na Tarefa E (Figura 49), que explora situações de compra e venda, pretendia-se ver o tipo de abordagem dos problemas que era preferido e se os alunos usavam conhecimentos matemáticos relacionados com tarefas do quotidiano, como a compra e a venda de itens, ou seja, se estabeleciam conexões entre a Matemática escolar e a vida real. Nesta época, em Portugal, a moeda era o escudo, correspondendo 1000 escudos a um conto. Por isso, é esta moeda

considerada no enunciado, ao contrário do que acontece nos exemplos acima analisados, onde já existem resoluções com euros.

A Tatiana, tal como a maioria dos alunos cuja L1 é o crioulo, preferiu uma abordagem global do problema: adicionou todas as compras, depois adicionou todas as vendas, calculou a diferença entre elas e, por último, indicou o lucro obtido. Esta abordagem do problema e estratégia de resolução é semelhante à da Figura 60 que, sendo posterior, já usava euros. Como se tratava de um problema com dinheiro, apesar de preferir uma abordagem global, a Tatiana usou um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética, baseada na adição e subtracção. Juntou-lhes uma explicação final, que corresponde a uma breve composição matemática, antes de escrever a resposta. O tipo de raciocínio e estratégia de resolução utilizados não são os preferenciais da Tatiana e, por isso mesmo, iluminam como a natureza da tarefa também configura os desempenhos matemáticos. Assim, para que as formas naturais de pensar e fazer Matemática possam ser utilizadas, é importante que a natureza das tarefas seja diversificada. Abaixo indicamos a resolução da Tatiana:

> Compras: 200 + 500 = 700
>
> Vendas: 300 + 600 = 900
>
> Lucro: 900 – 700 = 200
>
> Para sabermos o lucro, diminuímos o total das vendas, ao total das compras, e dá 200 contos de lucro.
>
> R: Teve 200 contos de lucro.

Como é habitual na Tatiana, as respostas são detalhadas, completas e ela preocupa-se em explicar o que pensou, quando elaborou aquela estratégia de resolução. Esta capacidade de identificar os detalhes dos enunciados e de produzir respostas completas, bem como a facilidade com que resolveu os problemas do IACC, fez a professora/investigadora pensar que a Tatiana tinha uma forte

margem de progressão, o que se veio a confirmar posteriormente, pelos resultados que ela obteve, tanto em Matemática, como noutras disciplinas. Para tal, pareceu-lhe essencial que ela melhorasse a auto-estima positiva, enquanto aprendente de Matemática, algo que teve em consideração ao longo do ano lectivo.

O Tomás preferiu uma abordagem passo-a-passo, fazendo cada operação pela ordem indicada no enunciado e calculando, depois, a quantificação do lucro. Recorre a um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética, baseada em subtracções e adições, ou seja, em duas das quatro operações elementares da aritmética. A seguir a cada operação, escreve uma pequena explicação do que sucedeu e, na última, indica o lucro obtido, no final de todas as transações. Assim, além da estratégia de resolução aritmética existe, à direita, uma composição matemática, pois conseguiríamos perceber o que aconteceu lendo apenas essas explicações, sem os registos das adições e subtrações efectuadas. Uma confirmação de que necessita de mobilizar o raciocínio concreto (RC), como tínhamos visto na Tarefa C, é que precisou de imaginar o dinheiro que o comerciante teria, à partida, para ir fazendo as operações indicadas no enunciado. Tal como a maioria dos alunos que o fizeram, como relata Machado (2014), considerou que o comerciante teria 1000 contos. Isto é semelhante ao que observamos na Figura 52, numa resolução posterior, que já usava euros.

1000 – 300 = 700 Depois da primeira compra tinha 700

700 + 400 = 1100 Depois da primeira venda lucrou 100

1100 – 500 = 600 Depois da segunda compra tinha 600

600 + 600 = 1200 No final, depois da segunda venda, tinha 200 de lucro

R: Lucrou 200 contos.

Ambos conseguiram resolver a Tarefa E (Figura 49), tal como acontecera na Tarefa D (Figura 37), mas cada um recorrendo às formas naturais de

abordagem, que eram diferentes para cada um deles, pois estas são configuradas pela L1. Se a professora/investigadora não lhes tivesse permitido fazer isso, provavelmente os resultados obtidos no IACC, bem como nas aulas posteriores, ao longo do ano lectivo, seriam menos conseguidos. Sobretudo a Tatiana, que preferia uma abordagem, raciocínio e estratégia de resolução que não são aceites no contrato didáctico dito tradicional (César, 2003, 2009), com que ela contactara nos anos lectivos anteriores, é muito provável que continuasse a apresentar dificuldades nas aprendizagens matemáticas, como referiu no Q1.

Estas diferenças de abordagem dos problemas, raciocínios matemáticos e estratégias de resolução também se observaram nas primeiras tarefas matemáticas resolvidas em aula, como mostram César e Machado (2024b). Para além disso, aparecem noutras díades, como a formada pelo V. e a M., que acima discutimos e que César (2003, 2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b) e César e Machado (2024a) analisaram, anteriormente, bem como em muitas outras díades, como mostrou a meta-análise do *corpus* empírico completo do projecto IC. No IC, esta diversidade era considerada uma riqueza, pois as díades em que os alunos mobilizavam capacidades e competências complementares eram as que mais progrediam, como já ilustrara César (1994), num estudo anterior, cujos resultados foram considerados no início do projecto IC. Por isso, no início do ano lectivo, a professora/investigadora formou uma díade composta pelo Tomás e pela Tatiana. Cada um deles podia aprender novas abordagens dos problemas, raciocínios matemáticos e estratégias de resolução com o outro e isso iria ajudá-los a progredir nos desempenhos matemáticos, bem como aumentar a auto-estima positiva da Tatiana, enquanto aluna de Matemática. Apesar de eles afirmarem, na primeira entrevista (E1, Dezembro 1999), que não se teriam escolhido um ao outro, como par, a partir da segunda semana de aulas, reconheceram, em várias conversas informais, que conseguiam progredir mais por trabalharem juntos (César, 2017; César & Machado, 2024b). Para a Tatiana, perceber que alguém podia aprender Matemática com ela, foi uma revelação e o início do desenvolvimento de uma auto-estima positiva, enquanto aluna de Matemática, fomentando a resiliência. Este aspecto foi essencial para promover os seus desempenhos matemáticos, levando-a a atingir classificações mais elevadas.

Trabalho em díade ao longo dos anos lectivos

As primeiras semanas em que se abordavam novos conteúdos matemáticos eram fundamentais para consolidar as regras do novo contrato didáctico e o trabalho dialógico e colaborativo, nas díades. Por isso, como referimos quando analisámos os primeiros processos interactivos do V. e da M., nas aulas de Matemática, aquelas tarefas pretendiam que os alunos pudessem resolver os problemas recorrendo a diversas abordagens, raciocínios matemáticos e estratégias de resolução. Naquela época, as equações eram o primeiro conteúdo a ser estudado e eram também um dos mais temidos pelos alunos, como realçaram César (1994) e César e suas colaboradoras (2000). Os alunos tendiam a considerar aquele conteúdo difícil e, por isso, muitas vezes, nem tentavam resolver as tarefas propostas. No projecto IC, com uma primeira semana de aulas bem diferente, com mensagens implícitas poderosas, que tinham sido passadas aos alunos, a professora/investigadora esperava que não houvesse rejeição e que existissem diversas estratégias de resolução para cada problema, o que iria enriquecer a discussão geral (turma), que seria realizada após o trabalho em díade.

Optámos por analisar a resolução da Tatiana e do Tomás à segunda tarefa que o V. e a M. também resolveram, para vermos o que têm em comum, mas também o que as diferencia. Apesar da turma do V. e da M. ser do 9.º ano de escolaridade, como havia 24 alunos que tinham obtido nível negativo a Matemática no ano lectivo anterior, o professor/investigador começou o conteúdo programático das equações com tarefas que lhes permitissem utilizar diversos raciocínios e estratégias de resolução, bem como aprender conteúdos de anos anteriores, que fossem essenciais para os daquele ano de escolaridade. Daí ter utilizado a mesma tarefa que esta professora/investigadora escolheu para o 7.º ano de escolaridade, numa turma com modeladores pessoais de desempenho (MPD) muito diferentes (Figuras 64 e 65). Assim, as decisões quanto às tarefas a propor tinham em consideração aquilo que mais favoreceria a motivação, os desempenhos matemáticos, as aprendizagens e o desenvolvimento dos alunos de uma determinada turma.

Confrontar os desempenhos e processos interactivos do V. e da M., com os da Tatiana e do Tomás, permite enriquecer a interpretação de resultados e, como

se pode ver desde a parte inicial desta interacção, há fortes semelhanças quanto às formas naturais de abordagem, raciocínio e estratégias de resolução entre o V. e a Tatiana, ambos com o crioulo como L1, e entre a M. e o Tomás, cuja L1 é o português. Assim, vemos que não é o género, nem a classificação obtida em Matemática, em anos lectivos anteriores, que configuram estas preferências, mas sim a L1 e o tipo de cultura em que se participa. O V. e a Tatiana preferem uma abordagem global do problema, um raciocínio geométrico e uma estratégia de resolução por representação gráfica, pois ambos desenham o queijo e nele marcam o que foi vendido, percebendo imediatamente que têm de começar por traçar $\frac{1}{6}$, que é a parte vendida mais difícil de marcar, o que revela um raciocínio geométrico bastante desenvolvido, algo que a M. e o Tomás não revelaram, pois tiveram dificuldade em perceber porque se começava por marcar $\frac{1}{6}$. Depois disso, a Tatiana consegue recorrer a uma estratégia aritmética, usando a calculadora, para chegar ao resultado final, enquanto o V. continuou a pensar geometricamente e só recorreu a uma estratégia aritmética, muito brevemente, quando era imprescindível fazê-lo. Para ele, que até aí tinha obtido Nível 1 (o mais baixo possível) a Matemática (Figuras 2 e 64), a representação gráfica é ainda mais determinante na sua resolução. A M. e o Tomás optam por uma abordagem passo-a-passo, um raciocínio analítico e uma estratégia aritmética, mas enquanto o Tomás é bem-sucedido ao adicionar as fracções, isso não acontece com a M., que apenas deteta que há um erro quando o V. a confronta com a diferença dos resultados que os dois obtiveram. No entanto, independentemente do género, há outro aspecto semelhante: é aquele que se julga e é reconhecido como melhor aluno (*Me-position*, como os outros me vêem), que começa a interacção: a M., que tinha Nível 5 (o mais elevado) a Matemática; o Tomás, que obteve Nível 3, mas sem nunca ter nenhuma classificação negativa e tendo esperança de chegar a Nível 4 ou 5. Por isso, o estatuto que se tem como aluno mostrou, nestas díades, e em muitas outras, ser mais determinante para a liderança, do que o género, se elas conseguirem obter mais sucesso académico do que os pares masculinos. No entanto, a discriminação de género existe quando não se observa sucesso académico por parte dos elementos femininos: nessa situação, as meninas não lideram,

mas os rapazes, por vezes, continuam a fazê-lo, como já revelava César (1994), num estudo anterior.

Apesar das semelhanças configuradas pela influência da L1 nas resoluções matemáticas destas duas díades, existem muitas diferenças no processo interactivo, que importa assinalar: (1) a rejeição do par é muito acentuada entre o V. e a M., ilustrada até pela maneira como se afastam um do outro espacialmente, sentando-se na ponta da mesa, o que não acontece entre o Tomás e a Tatiana; (2) o estatuto enquanto aluno de Matemática, era semelhante para a Tatiana e o Tomás, ambos com Nível 3 (nível positivo mais baixo), mas muito diferenciado para a M. (Nível 5) e o V. (Nível 1), que também apresentavam formas de estar, em aula, muito diferentes, algo que não acontecia entre o Tomás e a Tatiana, ambos alunos sossegados, sem participações por indisciplina; (3) provavelmente por isso, a desconfiança que sentem um em relação ao outro, leva o V. e a M. a fazerem uma ruptura em relação ao contrato didáctico sugerido e resolverem o problema individualmente, só o discutindo no final, enquanto o Tomás e a Tatiana trabalham de forma colaborativa e dialógica, durante esta resolução; (4) a M., que se considerava e era uma aluna de sucesso em Matemática, tentou liderar e pressionar o V. para aderir à sua estratégia de resolução preferencial e só o deixou liderar, brevemente, quando ele lhe provou que a resolução dela não estava bem, enquanto o Tomás e a Tatiana têm uma liderança partilhada; (5) o professor/investigador aparece junto do V. e da M., contribuindo com questões para que eles progridam na resolução, o que não acontece com o Tomás e a Tatiana; (6) os primeiros elogios do Tomás à Tatiana surgem mais cedo e são sinceros, enquanto os da M. são um misto de elogio e picardia, por considerar que "desenhos" não são Matemática e que o professor/investigador irá validar a estratégia de resolução dela (M.) e não a dele (V.); (7) a actuação do professor/investigador reforça as regras do contrato didáctico, pois ele não pretende fazer juízos de valor sobre as diferentes estratégias de resolução, preferindo explorá-las em paralelo, facilitando a aprendizagem dos diversos alunos; e (8) como a Tatiana e o Tomás se aceitam mais facilmente, reconhecem mais depressa que podem aprender muito um com o outro, enquanto o V. e a M. precisaram de mais aulas, para que isso viesse a acontecer. Apesar disso, em qualquer uma destas

díades a amizade entre eles perdura, mesmo passados cerca de 27 e 25 anos, respectivamente.

Como César (2002) tinha salientado, recordando o que afirmara João dos Santos, só conseguimos pensar aquilo que já fomos capazes de sentir. Na relação entre a Tatiana e o Tomás, embora eles não se tivessem escolhido como par, se a decisão fosse deles, houve uma aceitação do outro que foi fácil, que se observou existir desde que começaram a trabalhar em díade e a interagir. Nenhum deles sentia o outro como uma ameaça e, por isso, rapidamente conseguiram pensar em conjunto, co-construindo as resoluções e interessando-se pelos raciocínios e estratégias de resolução um do outro. O que sentiam, nomeadamente terem percebido logo na primeira aula em que trabalharam em díade que podiam aprender um com o outro, levou-os a vivenciar a interculturalidade e a inclusão mais depressa, a valorizar as diferenças, porque estas não lhes eram desconfortáveis. Assim, sentindo-se tranquilos, podiam viver e pensar a interculturalidade e a inclusão. Com o V. e a M. há um sentimento de rejeição tão forte, que se sentam na ponta da mesa, longe um do outro e, por imposição da M., decidem trabalhar individualmente, não respeitando o contrato didáctico. Esta forma de sentir, sobretudo por parte da M., não lhe permite aceitar que possa aprender com o V., pelo menos nestas primeiras aulas de trabalho em díade. Só depois da resolução desta tarefa, eles aproximaram as cadeiras e começaram a sentir-se menos desconfiados, menos desconfortáveis. Por isso, levaram mais tempo a confiar um no outro. Mas, esse tempo, esse ultrapassar de sentimentos de desconfiança, fizeram-nos questionar as formas de agir e reagir um do outro, as diferenças que os separavam e, quando conseguiram sentir que podiam confiar um no outro, conseguiram pensar a diferença de outra maneira, valorizando-a, "celebrando-a" (Armstrong et al., 2000), o que significa pensar a inclusão, a interculturalidade, a discriminação, os preconceitos, de uma forma muito mais aprofundada, que ía para além da escola, incluindo a comunidade social alargada. Assim, para o V. e a M., as vivências da aula de Matemática constituíram uma forma de abordagem da Matemática crítica (Skovsmose, 2012, 2022, 2023). Precisamente porque só conseguimos pensar o que já fomos capazes de sentir, são tão importantes os mecanismos de *inter-empowerment* e as mensagens implícitas, usados na primeira semana de aulas (César, 2009). São esses os primeiros motores que podem

facilitar sentir o outro, o diferente, de uma maneira mais tranquila, mais capaz de permitir aprender com ele, e isso é essencial para começar a construir uma comunidade de aprendizagem (Civil, 2007) e espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004), onde também me tenho de sentir seguro para me expôr, para conseguir expressar dúvidas e levantar questões, como ilustrámos na discussão geral do IACC, na turma da Tatiana e do Tomás.

Esta interacção entre a Tatiana e o Tomás, numa outra perspectiva, já foi analisada por César e Machado (2024b). Porém, nesse artigo, não serviu para a confrontar com a de outra díade (V. e M.), também ela mista do ponto de vista da L1, da abordagem, raciocínio e estratégia de resolução que preferem, bem como com capacidades e competências complementares. Por isso, a interpretação que agora produzimos ilumina questões diferentes e permite ilustrar como uma interpretação de resultados é configurada pelo olhar e pelas decisões de investigação de quem a faz, tal como salientava César (2010). Esta autora assumia ser muito importante os investigadores fazerem uma reflexão sobre o que estava subjacente às decisões de investigação que tomavam e às interpretações que elaboravam, clarificando os aspectos subtis que regem as questões relacionadas com o poder, na investigação.

> Problema – Um merceeiro vendeu metade de um queijo, depois um quarto e, finalmente, uma sexta parte. Verificou, então, que ainda lhe restavam 125 g. Quantos quilos pesava o queijo?
>
> 1. TO – Como é que achas que isto se faz?
> 2. TA – Eu gosto de desenhar e resolver assim. Nem acho que seja Matemática, mas a ‘stora parece gostar e até me chamou ao quadro naquela dos chocolates [discussão geral da Tarefa A, Figura 72]. Por isso, eu desenhava o queijo e depois marcava o que tinha sido vendido...
> 3. TO – Como ela gosta de maneiras diferentes de fazer, fazemos as duas: a tua, com desenhos; e a minha, com contas. Assim, até aprendemos mais e mostramos que trabalhámos muito. Isso também conta na avaliação. Achas bem?
> 4. TA – De acordo. [Começa a desenhar um círculo no caderno e o TO olha atentamente]
> (Tomás e Tatiana, O, registada em áudio, Setembro 1999)

Como aconteceu em muitas outras díades, em que a rejeição do par não era profunda e em que os níveis obtidos, em Matemática, não eram muito díspares (aqui, ambos tinham Nível 3), o Tomás começa por perguntar como ela acha que se resolve o problema (Fala 1), assumindo brevemente a liderança. Porém, vemos que, nesta díade, ambos começam a interagir desde o início (Falas 1 a 4) e percebe-se a intenção de respeitarem o contrato didáctico proposto, o que não acontece entre o V. e a M. Na Fala 3, o Tomás realça a vantagem de usarem as duas estratégias de resolução, pois a professora/investigadora gosta de explorar diferentes estratégias de resolução na discussão geral, eles aprendem mais e mostram que trabalharam bastante. Isto revela que o Tomás, participando na cultura dominante, conhece bem os critérios de avaliação e o que agrada aos professores, reconhecendo como a participação nas aulas conta para a avaliação sumativa. Ao explicitar essas regras à Tatiana, está a desocultá-las, ajudando-a a também as conhecer melhor, favorecendo o seu acesso ao sucesso académico. Na Fala 4, a Tatiana explicita que está de acordo com a sugestão do Tomás de ser ela a desenhar (estratégia de resolução por representação gráfica). Nas díades em que a rejeição é muito forte, como acontecia inicialmente com o V. e a M., a resolução da tarefa, nomeadamente a escrita na folha de respostas, não era partilhada desde início do processo interactivo, pois deixar o outro escrever implica um certo grau de confiança na sua resolução e nos seus desempenhos matemáticos.

Se compararmos este início com o da M. e do V., vemos imensas diferenças no tipo de interacção, na tensão existente e na incapacidade de aceitar estratégias de resolução diferentes da sua, que a M. revela e o Tomás não. Não podemos esquecer que, na díade Tatiana e Tomás, eles obtiveram o mesmo nível a Matemática (Nível 3) e nenhum dos dois tem formas de actuação disruptivas, sendo ambos alunos bastante calmos. Na díade V. e M., eles estão em pólos opostos quanto ao sucesso escolar e académico – ela, pouco apreciada pelos colegas, em geral, mas com Nível 5 (o mais elevado) a Matemática; ele, muito popular entre os alunos do bairro, que são a maioria naquela escola, mas com Nível 1 (o mais baixo) a Matemática. Para além disso, o V. tinha frequentes conflitos com alguns professores, fora injustamente suspenso no 8.º ano de escolaridade, não trazia material para as aulas de Matemática e ambos achavam o outro "tudo quanto não queria na minha vida e a última pessoa com quem quereria trabalhar" (M., E1,

Dezembro 1997). Por isso, que o início da interacção fosse tão distinto, não é de admirar. Mas a amizade profunda, posterior, entre o V. e a M., que dura até hoje, passados 27 anos, realça como é importante juntar díades que não seriam as escolhidas pelos alunos. A escolha destas díades tem de ser baseada em critérios bem definidos, quanto às capacidades e competências complementares dos alunos e aos MPD (César, 2024b), sobretudo quando eles se conhecem bastante pouco, o que os impede de reconhecerem o que podem aprender um com o outro. Ilustra, ainda, a relevância de promover o diálogo intercultural, usando, fora das aulas, mediação cultural bi-unívoca (César, 2017) e, dentro delas, trabalho colaborativo e dialógico, em díades ou pequenos grupos, com tarefas matemáticas de diferentes naturezas, que potenciem o recurso a abordagens dos problemas, raciocínios matemáticos e estratégias de resolução diversificados.

5. TO – Agora marcas metade...
6. TA – Não, primeiro desenho $\frac{1}{6}$, que é o mais difícil...
7. TO – Mas, primeiro ele vende metade!...
8. TA – Verdade. Mas também vende $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$. Marcar metade e $\frac{1}{4}$ é fácil. Mas marcar $\frac{1}{6}$ é mais difícil, para ficar bem desenhado. Por isso, começo por aí...
9. TO – Não concordo!
10. TA – Vou fazer nesta folha velha, para tu veres. [Desenha um círculo, marca metade e traceja, fazendo o mesmo para $\frac{1}{4}$. TO vai acenando, satisfeito. Então, ela passa-lhe a folha e diz] Agora, marca lá $\frac{1}{6}$.
11. TO – Claro, é... é... [Pára] Sei lá onde está $\frac{1}{6}$...
12. TA – Pois... se começarmos ao contrário, marcamos primeiro $\frac{1}{6}$, depois metade e a seguir $\frac{1}{4}$ [Vai desenhando enquanto fala] e assim já é fácil. [Olha para ele, em busca de aprovação]
13. TO – Já percebi. Podes fazer essa na folha de respostas. A desenhar tu és bué de esperta, muito mais do que eu!...

(Tomás e Tatiana, O, registada em áudio, Setembro 1999)

Mesmo quando surge o primeiro desacordo (Falas 5 a 9), o tom de voz não é agressivo. Cada um limita-se a tentar convencer o outro e, como não conseguem, a Tatiana (Fala 10), pega numa folha de rascunho e faz a representação gráfica (que eles designam por "desenho"), recorrendo a uma abordagem passo-a-passo, como o Tomás preferia. Depois de marcar metade e um quarto, passa-lhe a folha para ele marcar um sexto (Fala 11) e, rapidamente, ele responde "Sei lá onde está $\frac{1}{6}$...", dando-lhe razão a ela. A Tatiana (Fala 12) faz, então, na folha de rascunho, a representação gráfica usando uma abordagem global e o Tomás percebe logo que funciona, fazendo-lhe mesmo um elogio (Fala 13). Portanto, nesta díade, o desacordo é facilmente superado, não há atitudes agressivas e elaboram uma resolução partilhada, que escrevem na folha de respostas. Além disso, não há picardias, como as que a M. dizia ao V., pois o Tomás, quando elogia a Tatiana, fá-lo sem desconfiança, acreditando mesmo que ela é melhor que ele nas representações gráficas, que ele designa por "desenhos" e que ela realiza muito facilmente. Esta forma de reagir do Tomás mostra que ele não se incomoda por a Tatiana ter algumas capacidades e competências mais desenvolvidas do que ele. O Tomás é confiante, tem uma auto-estima académica positiva elevada e, por isso mesmo, acredita que também há capacidades e competências em que é o mais desenvolvido da díade. Como afirmou numa conversa informal posterior, "todos somos melhores numas coisas e piores noutras, é assim para toda a gente" (Tomás, CI, registada pela investigadora, Outubro 1999), o que revela nitidamente que ele encarava este assunto com bastante leveza, sem se sentir incomodado por isso. Portanto, não tenta competir com a Tatiana, nem se sente posto em causa por aquilo em que ela é melhor do que ele, o que lhes permite aproveitarem, desde logo, as vantagens de trabalharem de forma colaborativa e dialógica, em díade.

De notar que cada díade apenas tinha uma folha de respostas, para que a mensagem implícita de que deviam trabalhar colaborativa e dialogicamente fosse reforçada. Porém, se isto resultou para o Tomás e a Tatiana, tendo ela recorrido a uma folha de rascunho (Fala 10), para não escrever na folha de respostas, antes de ambos estarem de acordo, não surtiu efeito para o V. e a M., como vimos anteriormente. Mesmo tendo apenas uma folha de respostas, o V. e a M. trabalharam individualmente, cada um na sua folha de rascunho, sem chegarem a

anotar nenhuma resolução na folha de respostas, até o professor/investigador ir junto deles, pois não conseguiram chegar a um acordo. Isto ilustra que, se o conflito sócio-cognitivo é muito profundo, chegando mesmo a existir conflito emocional, terem apenas uma folha de respostas pode não ser suficiente para os alunos partilharem a resolução, sendo necessária a intervenção do professor/investigador, para ultrapassar o impasse e voltarem a aderir ao contrato didáctico proposto (César, 2009, 2024b; César & Machado, 2024a).

> 14. TA – Agora, olha para aqui [Mostra o desenho do queijo] Eu acho que a parte que não está traçada, é metade de $\frac{1}{6}$, da que tracei primeiro...
> 15. TO – Hum...hum... [Som afirmativo] e podemos verificar com o transferidor... [Pega nele, mede... e sorri] És um génio!... Só a olhar, viste logo que era metade.
> 16. TA – E se é metade, é $\frac{1}{12}$ ... é como se tivesse dividido o queijo em 12 partes. Portanto, foi isso que sobrou por vender, quer dizer $\frac{1}{12}$ é 125 g. Agora, é só fazer contas..
> 17. TO – Já fiz aqui... [Mostra a calculadora] Dá 1.5 kg. Escreve isto na folha e dá a resposta.
> 18. TA – Então, esta maneira está feita. Agora vamos fazer a tua.
> (Tatiana e Tomás, O, registada em áudio, Setembro 1999)

Na Fala 14, a Tatiana mostra o desenho e diz ao Tomás que acha que a parte que sobra, que não está traçada, é metade de $\frac{1}{6}$. Apesar do Tomás fazer um som afirmativo (Fala 15), ele "não vê" logo que é metade de $\frac{1}{6}$ e, por isso, resolve verificar, usando o transferidor. Isso reforça a preferência da Tatiana por raciocínios geométricos e estratégias de resolução por representação gráfica, bem como a do Tomás por raciocínios analíticos, com recurso a um instrumento de medida, que o auxilia na estratégia de resolução aritmética, que ele prefere e utiliza. Mas, assim que verifica e comprova que é verdade, faz um enorme elogio à Tatiana: "És um génio!... Só a olhar viste logo que era metade..." (Fala 15), o que valida o raciocínio geométrico dela, que ele reconhece ser muito desenvolvido. Por isso, nesta díade, apesar de eles terem abordagens do problema, raciocínios

matemáticos e estratégias de resolução preferenciais diferentes, ambos querem também utilizar e aprender as formas preferenciais do outro, o que faz a resolução fluir, sendo o ritmo rápido. Nas Falas 16 e 17, como já estão de acordo e apenas recorrem à máquina de calcular para fazerem os cálculos, são ainda mais rápidos, pois o Tomás (Fala 17), assim que concordou com a Tatiana, terminou logo a resolução que ela tinha começado. O clima interactivo simpático e descontraído está também patente na Fala 18, quando a Tatiana reconhece que aquela estratégia de resolução está terminada e, por isso, agora vão fazer a do Tomás. Mais uma vez, existem marcas da adesão ao novo contrato didáctico e de como esta díade já trabalha de forma colaborativa e dialógica, aproveitando os contributos que cada um pode dar para a resolução da tarefa, algo patente na forma como interagem e na resolução partilhada, em que o Tomás pega logo na calculadora, para concluir a estratégia de resolução da Tatiana.

Isto não se verifica na interacção entre o V. e a M., em que ele, habitualmente mais explosivo, consegue tentar evitar conflitos, ou a escalada deles. Porém ela, ao perceber que a sua resolução não está bem, não consegue evitar um tom de voz agressivo, assim como uma expressão pouco simpática, que lhe dirige, e à qual ele não responde, evitando aprofundar o conflito. Para além disso, o V. consegue interessar-se pela estratégia de resolução da M. e, apesar de não saber adicionar fracções, como declara, consegue provar-lhe, através da representação gráfica (desenhos) que elabora, que o resultado que ela obteve não corresponde à parte do queijo que sobra. Já a M., tem muita dificuldade em aceitar que um aluno de Nível 1 seja capaz de resolver aquele problema e ela não, o que torna o clima entre eles pesado e pouco agradável, apesar dos esforços do V. para que isso não aconteça. Aqui, vemos a importância de trabalharem colaborativa e dialogicamente e de aceitarem estratégias de resolução alternativas, algo que o V. estava disposto a fazer, mas a M. não. Se, como fizeram a Tatiana e o Tomás, tivessem explorado cada uma das estratégias de resolução em conjunto e em paralelo, provavelmente teriam chegado à solução, num processo interactivo menos atribulado.

19. TO – A minha é somar as fracções: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$. Sabes como se faz?
20. TA – Temos de pôr os números iguais aqui [Aponta para os denominadores]

21. TO – Sim, reduzir ao mesmo denominador, que eu acho que é 24. Por isso, fica $\frac{12}{24}+\frac{6}{24}+\frac{4}{24}$, que dá $\frac{22}{24}$, que é o que ele vendeu. O queijo todo são $\frac{24}{24}$. Portanto, sobram $\frac{2}{24}$... reduzindo, dá $\frac{1}{12}$, como te deu a ti.
22. TA – Então, depois, são as mesmas contas que já fizemos. Escreve tudo e dá a resposta.
23. TO – Estamos bué de espertos. Fizemos logo de duas maneiras e uma verifica a outra, porque dão o mesmo resultado. A 'stora vai ficar contente.
(Tomás e Tatiana, O, registada em áudio, Setembro 1999)

Na parte final da resolução deste problema (Falas 19 a 22), utilizam uma abordagem passo-a-passo, um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética, que são as que o Tomás prefere, como é habitual em alunos cuja L1 é o português, ou outra língua fonética (César, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b). Na Fala 19, ele escreve as fracções que vai adicionar, pela ordem indicada no enunciado (abordagem passo-a-passo), perguntando à Tatiana se ela sabe adicionar fracções. Ela lembra-se de que têm de reduzir ao mesmo denominador (Fala 20), apesar de não usar esta designação, o que leva o Tomás (Fala 21) a introduzir a designação rigorosa do que têm de fazer. Apesar de ambos saberem que é preciso reduzir as fracções ao mesmo denominador, esta designação é mais facilmente recordada por quem participa numa família letrada e tem o português como L1 (Tomás), o que revela algumas dificuldades evocadas num outro estudo (César, 2012a).

No entanto, o Tomás pensa no 24 e não no 12, quando reduz ao mesmo denominador, o que o faz obter, como resultado, $\frac{2}{24}$. Isto poderia ter originado uma dúvida. Mas, como ele tinha a certeza de que a resolução anterior estava certa, porque até tinha usado o transferidor para verificar que era $\frac{1}{12}$, rapidamente percebe que pode reduzir a fracção e também obtém $\frac{1}{12}$. Assim, a Fala 22 é apenas a decisão de escreverem aquilo na folha de respostas, sendo desta vez registado pelo Tomás, por ser a estratégia de resolução que ele prefere. Isto é algo também frequente, quando as díades estão de acordo quanto às resoluções: as folhas de respostas serem escritas por ambos, quando existe uma resolução

partilhada. A Fala 23 é apenas um elogio do Tomás à forma como trabalharam, porque está visivelmente satisfeito com a maneira como a resolução decorreu.

Mais uma vez, as diferenças em relação à interacção do V. e da M. são nítidas. O Tomás e a Tatiana são muito rápidos, seguros e rigorosos no que fazem. Completaram as duas estratégias de resolução na Fala 22, o que contrasta com o V. e a M., que o fizeram na Fala 47, iluminando como as desconfianças da M. tornaram a resolução mais longa, ocupando mais do dobro das falas e do tempo (minutos). O Tomás e a Tatiana escrevem as duas estratégias de resolução na folha de respostas e passam rapidamente ao problema seguinte. O V. consegue terminar a sua estratégia de resolução rapidamente e, pelo ar feliz que tem, a M. suspeita que ele acha que está certa. Porém, ela está sem conseguir terminar a sua estratégia de resolução e, sobretudo, sem perceber porque não obteve o mesmo resultado que o V., sendo incapaz de aceitar isso. Assim, não consegue ter a calma suficiente para progredir na sua resolução. Mais tarde, há-de afirmar, na primeira entrevista (E1), que perceber que um aluno de Nível 1 conseguia, muitas vezes, ser mais rápido e ter mais sucesso do que ela, foi duro (César, 2009). Mas, nessa altura, já ela tinha percebido que o V. tinha imensas capacidades e competências e que ela, apesar de não poder melhorar a classificação, porque já tinha a máxima possível (Nível 5), podia obter uma percentagem ainda mais elevada e desenvolver, com ele, o raciocínio espacial e geométrico, algo essencial para o 10.º ano de escolaridade, em que todo o 1.º período (Setembro a Dezembro) seria dedicado à Geometria. Isso mostra que, a partir de uma dada altura, os próprios alunos distinguem o que são capacidades e competências, que a M. ainda precisava de desenvolver, do que são classificações académicas, em que ela já tinha o nível máximo, mas podia melhorar a percentagem obtida, algo relevante no 10.º ano de escolaridade, onde se utiliza uma escala de 0 a 20 valores. Esta distinção é essencial para os alunos com a classificação máxima perceberem que, ao trabalharem de forma colaborativa e dialógica, também podem progredir, no que se refere às capacidades e competências, bem como à percentagem da classificação, ou seja, que esta forma de trabalho não é apenas útil para os que apresentam níveis negativos nas classificações e dificuldades de aprendizagem, em Matemática.

O reconhecimento das capacidades e competências elevadas do V., bem como dos conhecimentos matemáticos que mobilizava, levaram a M., no ensino secundário, a continuar a estudar com ele, apesar de estarem em turmas diferentes (César, 2009, 2013a, 2013b). Muitas vezes, ela recorreu ao V. e lhe pediu que fosse a casa dela, para estudarem Matemática juntos, porque ele tinha uma capacidade de visualização que a ajudava a obter as classificações elevadas de que necessitava para poder vir a ser admitida em Medicina. Portanto, embora mais tarde, depois da dimensão tempo lhe ter permitido conhecê-lo melhor, a M. acabou por reconhecer que ter trabalhado com o V. a tinha beneficiado muito, como iluminam os excertos acima analisados e outros citados por César (2003, 2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b). Ao longo da vida, isso esteve patente em muitos momentos e mostrou a solidez da relação que eles tinham estabelecido, a partir do 9.º ano de escolaridade.

As díades eram mudadas regularmente para evitar dependência, ou seja, para que um aluno não se convencesse de que apenas tinha sucesso se trabalhasse com um determinado par. Para além disso, ao fim de algum tempo, o que aqueles dois alunos podiam progredir, um com o outro, já estava atingido, e isso também aconselhava a que trabalhassem com outros pares, com outras capacidades e competências, de que podiam beneficiar mais. Assim, a Tatiana e o Tomás ainda formavam uma díade quando resolveram o primeiro teste individual, em que ambos atingiram Nível 4. Porém, em Novembro (1999) mudaram de par. Nessa altura, se os tivéssemos deixado escolher, eles teriam preferido continuar a trabalhar um com o outro, tal como sucedeu com o V. e a M., acima analisados e descritos por César (2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b). Já se conheciam, confiavam um no outro, sabiam que conseguiam aprender um com o outro, sentiam-se confortáveis a trabalhar de forma colaborativa e dialógica, reconhecendo que aprendiam bem, em conjunto. Mas havia vantagens cognitivas em mudar os pares, bem como sociais, para alargarmos a socialização, levando-os a conhecer melhor outros colegas. Existiam também vantagens emocionais, para desenvolverem outras capacidades e competências deste domínio. Daí a decisão de mudar as díades, apesar de elas estarem a funcionar bem. Como os modeladores pessoais de desempenho (MPD) mostraram (Figura 65), na turma da Tatiana e do

Tomás era mais fácil formar as primeiras díades, pelo que não admirava que, ao fim de mais de dois meses de aulas, todas funcionassem bastante bem.

É importante salientar como foi diferente, para cada um deles, ter obtido Nível 4 no primeiro teste. Para o Tomás, que queria seguir para o ensino superior e aspirava obter Nível 4 ou 5 a Matemática, aquela classificação foi motivo de enorme satisfação. Os pais ficaram muito contentes, pois isso abria mais possibilidades de ele entrar num curso de Ciências, como desejava. Ele tinha primos que frequentavam a universidade, a família apoiava estudos longos, que acreditavam contribuírem para uma vida profissional com carreiras mais interessantes e para a realização pessoal. Os amigos do bairro novo, onde vivia, também delineavam esse percurso. Todos pensavam numa trajectória de participação ao longo da vida que passava por um curso no ensino superior. Por isso, aquela classificação não lhe causou conflitos entre as diferentes *I-positions* (filho, neto, sobrinho, primo, aluno, amigo) e valorizou a sua *Me-position* (como se via, enquanto aluno e como era visto, pelos outros).

Tranquilizou-o, convenceu-o de que, se continuasse a trabalhar, podia atingir Nível 5, pelo que só teve impactes positivos. Como nos afirmou, numa conversa informal, "agora, que já cheguei ao 4, tenho a certeza de que vou conseguir chegar ao 5. Se não for neste período, é no próximo. Mas vou ter 5 ainda este ano e vou ter mais de 17 [valores] no secundário." (Tomás, CI, registada pela investigadora, Novembro 1999). Esta confiança nas suas capacidades e competências, bem como nos seus desempenhos matemáticos, era muito mais frequente entre os alunos que participavam na cultura dominante que, naquela escola, entre os alunos, não era maioritária. Como vimos, quando acima analisámos a trajectória de participação ao longo da vida do V., apesar de ter obtido Nível 5 (3.º período) e 100% na prova de escola (vulgo, exame), no 9.º ano de escolaridade, e 20 valores (nota máxima), no ensino secundário e na prova nacional de 12.º ano de escolaridade, só depois de concluir o ensino secundário ele acreditou que era um aluno que obtinha classificações de excelência. Os efeitos negativos de obter insucesso académico cumulativo, durante vários anos, bem como de ouvir muitas críticas à sua forma de fazer Matemática, deixa marcas no *dialogical self* (César, 2009, 2013a, 2013b) e nas representações sociais de si próprio, enquanto aluno, que permanecem mesmo quando já obtém classificações extremamente elevadas.

Para a Tatiana foi diferente. Começou por ficar espantada – não queria acreditar que tinha Nível 4 num teste individual, a Matemática – mas, depois, ficou contente. Tanto ela como o Tomás "estavam expectantes em relação à nota um do outro e claramente agradou-lhes ambos terem obtido Nível 4" (Professora/investigadora, DB, Outubro 1999). Foi como se aquela classificação validasse a díade, a qualidade do seu trabalho enquanto par, pois "aprendemos tanto que até sozinhos [no teste individual] conseguimos ter 4" (Tomás, CI, registada pela investigadora, Outubro 1999). A diferença é que ele disse, convicto: "Eu sabia!" (Tomás, O, comentário em aula, registado no DB da professora/investigadora, Outubro 1999), enquanto ela comentou baixinho: "Não pode ser..." (Tatiana, O, comentário em aula, registado no DB da professora/investigadora, Outubro 1999), como se achasse que aquela classificação não era dela. Algo semelhante, mas mais extremo, tinha sucedido com o V., que pensou mesmo que o professor/investigador teria trocado a classificação dele com a de outro aluno, que se teria enganado, como acima descrevemos. Por isso, desconfiar dos seus desempenhos, quando estes progrediam, era frequente entre os alunos do bairro, que durante anos tinham visto as suas formas de fazer e aprender Matemática desvalorizadas, em aula e nos instrumentos de avaliação sumativa.

A auto-estima positiva, do Tomás, e a negativa, da Tatiana, transparecem nestes dois comentários. Mas ele era apreciado, em casa e na escola, pelo que fazia. Ela, nos anos lectivos anteriores, não era particularmente valorizada na escola. A família da Tatiana queria que ela começasse a trabalhar assim que terminasse o 9.º ano de escolaridade e também não valorizava o que ela aprendia na escola que, como a mãe afirmava, "só interessava para quem queria ser doutor" (Tatiana, E2, Junho 2000). Ela estudava porque existia a escolaridade obrigatória e porque ainda não tinha idade legal para ter um emprego, ou seja, 16 anos de idade. Mas, para a família dela, "o que se aprende na escola não põe pão na mesa" (Tatiana, E1, Dezembro 1999), como lhe dizia a mãe e a restante família. Na cultura em que participava, esperavam que começasse a trabalhar assim que concluísse o 9.º ano de escolaridade, tivesse muitos filhos e isso acontecesse cedo, que constituísse família. Se escolhesse "um bom marido, dos que valem a pena", como dizia a mãe dela, "até podes ficar em casa a tratar dos filhos e da lida da casa, como qualquer mulher gosta de fazer" (Tatiana, E1, Dezembro 1999). Por

isso, o que era valorizado na família dela e no bairro onde vivia, não eram os estudos, era conseguir trazer dinheiro para casa, para colmatar as dificuldades financeiras com que viviam.

Sendo a filha mais velha, a Tatiana estava incumbida de realizar muitas das tarefas domésticas: cozinhar, tratar dos irmãos mais novos, dar-lhes de comer, limpar e arrumar a casa, tratar da roupa, o que significava lavá-la, numa casa sem água canalizada, e costurar, quando era necessário. Tudo o que, na cultura em que participava, preparava uma mulher para a vida futura, para ser mãe e esposa. Ser capaz de tratar da casa e da família, de gerir o pouco dinheiro que havia para todos conseguirem comer, era valorizado. Ter Nível 4 a Matemática não interessava, pois não melhorava a vida dela, nem a da família. Por isso, na escola, ela sentia-se melhor, mais valorizada, mais compreendida, até nas suas dúvidas quanto ao futuro, quando estas surgiram. Tinha o seu cacifo, guardava lá os materiais, que estavam impecáveis, estudava na escola, para ter sossego e concentração. Mas, em casa, no bairro, se falasse nos estudos, sabia que não seria apreciada, que seria criticada, o que lhe criava conflitos entre as diversas *I-positions* (filha, irmã, aluna, amiga, colega de escola). Continuava a achar que iria trabalhar assim que terminasse o 9.º ano de escolaridade, ou seja, que a sua trajectória de participação ao longo da vida não passava por estudos longos, algo que só equacionou, de forma diferente, durante o 9.º ano de escolaridade, quando o sucesso académico nas diferentes disciplinas já estava mais consolidado, tendo obtido Nível 4 e, até, Nível 5, a algumas disciplinas.

No 7.º ano de escolaridade, a Tatiana e o Tomás não voltaram a fazer parte da mesma díade, mas trabalharam em conjunto, mais de uma vez, no 8.º e 9.º ano de escolaridade. Isto era habitual nas turmas com continuidade pedagógica, que participavam no projecto IC durante três anos lectivos consecutivos. Convém realçar que, quando as turmas já perceberam os critérios de formação das díades, geralmente são os alunos que decidem a planta da sala de aula, o que também constitui uma maneira de distribuir o poder e de promover a autonomia, algo essencial no IC. Para decidirem a formação das díades, têm de estar de acordo (toda a turma) com o que é proposto e justificar os motivos de terem formado aquela díade ou grupo. Portanto, este processo também tem subjacente trabalho colaborativo e dialógico, desta vez realizado em grande grupo, na turma. Assim,

revela já um maior nível de maturidade emocional, desenvolvimento cognitivo e responsabilização do que o trabalho em díade ou em pequenos grupos, escolhidos pelo professor/investigador.

No 9.º ano de escolaridade, quando trabalhavam em díade, na resolução de uma tarefa matemática sobre probabilidades, a Tatiana já tinha obtido Nível 4 (8.º ano de escolaridade) e alguns Níveis 5, em testes individuais (9.º ano de escolaridade) e o Tomás tinha obtido Nível 5 (8.º ano de escolaridade). Isto significa que, mesmo quando passaram a trabalhar com outros pares, continuaram a progredir nos desempenhos matemáticos, como seria desejável.

> No bar da tua escola as bebidas são todas ao mesmo preço. O Ricardo bebe, indiferentemente, laranjada ou cola. O Pedro escolhe sempre laranjada, cola ou ananás. O João bebe ananás, laranjada ou maracujá. Qual é a probabilidade de os três amigos irem separadamente ao bar e, sem combinar nada, escolherem a mesma bebida?

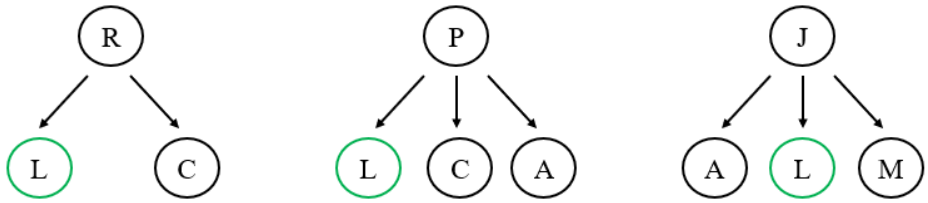
1. TO – Aposto que tu preferes fazer um esquema... [diz enquanto sorri]
2. TA – Prefiro... ainda gosto mais de pensar assim...
3. TO – Por mim, pode ser. Neste problema, até ajuda a pensar.
4. TA – Se pusermos o nome de cada um deles... e o que cada um bebe...
5. TO – Pois, e fazemos um daqueles esquemas com bolas!

[Pegam na folha e vão escrevendo alternadamente]

6. TA – Ricardo, Pedro, João...
7. TO – Agora, o que cada um bebe... fazes uma seta de cada bola e pões o que bebem...
8. TA – No R, que é do Ricardo, ele bebe laranjada ou cola...
9. TO – Podemos escrever L ou C, para ser mais rápido! [Agarrou na folha e escreveu ele, enquanto ela acenava com a cabeça, concordando]
10. TA – Vamos continuar. Da bola do P, que é o Pedro...
11. TO – saem 3 traços, um para cada bebida: laranjada, cola ou ananás...
12. TA – e também pomos só a primeira letra: L, C e A [enquanto escreve], para ficar um esquema mais arrumado!
13. TO – Agora fazemos o mesmo para o João. [Agarra no lápis e escreve na folha a continuação do esquema]

14. TA – Com o esquema é fácil ver que só bebem todos Laranjada. Vou pôr uma bola verde à volta do L.
(Tomás e Tatiana, O, registada em áudio, Setembro 2001)

Figura 74
Esquema elaborado pela Tatiana e pelo Tomás



Nesta primeira parte da interacção vemos que os alunos já se conhecem. O Tomás (Fala 1) sabe que a Tatiana prefere uma estratégia de resolução por representação gráfica (um esquema). Ele também já aprendeu, com ela e com outros colegas cuja L1 é o crioulo, que as representações gráficas podem ajudar na resolução dos problemas. Como as Probabilidades não são um conteúdo que considere fácil, como nos disse numa conversa informal no final da 2.ª aula deste ano de escolaridade, prefere que comecem pelo esquema (Fala 3) para, depois, calcularem a probabilidade. A Tatiana refere que "ainda gosto mais de pensar assim" (Fala 2), o que significa reconhecer que, para ela, a estratégia de resolução preferencial, em Matemática, é por representação gráfica. Mas esta frase tem também implícito que ela já aprendeu outras, que já as consegue mobilizar, quando isso é necessário, noutras tarefas e situações. Isto ilumina que, no início do 9.º ano de escolaridade, ou seja, quando a Tatiana já consegue utilizar muitas outras estratégias de resolução, num conteúdo matemático novo e mais complexo, esta continua a ser aquela em que se sente mais confortável, a que prefere. Isto foi algo que observámos frequentemente, em todos os alunos: uma tarefa mais complexa, fazia-os regressar às suas abordagens, raciocínios e estratégias de resolução naturais, iluminado a importância de estas serem respeitadas, em aula. Um ponto interessante é que o Tomás, cuja L1 é o português e que tende a preferir estratégias de resolução aritméticas ou algébricas, já aprendeu que, em

algumas tarefas, uma estratégia de resolução por representação gráfica o pode ajudar. Assim, neste problema, em que ele não consegue identificar imediatamente os casos favoráveis e os casos possíveis, reconhece isso mesmo (Fala 3).

O entendimento fácil e a confiança mútua entre o Tomás e a Tatiana faz com que a resolução seja rápida e fluida, co-construída (César, 1994, 1998b; César et al., 2000), pois ambos completam as frases (Falas 6 a 12) e escrevem na folha de respostas alternadamente, ou seja, a escrita também é partilhada. Isso indica que aderiram profundamente ao trabalho colaborativo e dialógico, que construíram uma enorme confiança mútua e cumplicidade, características de uma comunidade de aprendizagem (Civil, 2007). Este é o nível mais avançado de trabalho colaborativo. Geralmente, antes deste, existe um outro, que observámos no primeiro processo interactivo desta díade: cada um usa a sua estratégia de resolução, que explica ao outro, e cada um deles escreve a sua estratégia de resolução, na folha de respostas. Esta forma de actuação já é típica do trabalho colaborativo e dialógico, mas exige um grau menor de confiança, conhecimento do outro e cumplicidade, do que quando se trata de partilhar a escrita da mesma estratégia de resolução (César, 1994, 1998b). César (2013a), referindo-se ao V. e à M., mas no final do ano lectivo, numa aula em que o professor/investigador propôs uma tarefa de natureza aberta e os deixou escolher com quem trabalhariam, assim como César e seus colaboradores (2014), analisando uma resolução em pequeno grupo, noutra turma e escola, também relatam processos de co-construção, semelhantes aos agora usados pela Tatiana e pelo Tomás. O que César e seus colaboradores (2014) analisam é particularmente relevante, quanto à educação inclusiva, porque aquele grupo incluía um aluno que necessitava de AESE e que, inicialmente, era bastante rejeitado, algo que não se conseguiria identificar naquele episódio interactivo.

Como ambos percebem o esquema que estão a desenhar, esta primeira parte da resolução é muito veloz e o esquema é muito claro e rigoroso, pois até têm o cuidado de usar uma caneta verde à volta da bola que contém o L (laranjada), para indicar o único caso favorável, ou seja, a única bebida que os três bebem. Como clarificou a Tatiana, já depois de terminarem, quando a professora/investigadora passou pela mesa e olhou para o que tinham elaborado, “o verde é a cor da esperança. Por isso, verde para os casos favoráveis, pareceu-nos

bem" (Tatiana e Tomás, O, registada em áudio, Setembro 2001). Este comentário ilustra como, depois de trabalharem alguns meses ou anos de forma colaborativa e dialógica, os alunos dão atenção até aos pequenos detalhes.

> 15. TO – Isso mostra o caso favorável para cada um deles. No Ricardo, há um caso favorável, que é laranjada e dois casos possíveis, porque ele também pode beber cola... Escrevemos
>
> 16. TA – $\frac{1}{2}$, porque é 1 favorável e 2 possíveis... Se fizermos algo semelhante para o Pedro
>
> 17. TO – Fica $\frac{1}{3}$, porque este pode beber 3 bebidas diferentes.
>
> 18. TA – E para o João também é $\frac{1}{3}$, pelo mesmo motivo. Para sabermos a probabilidade...
>
> 19. TO – Multiplica-se... e dá $\frac{1}{18}$ ...
>
> 20. TA – R: A probabilidade de beberem todos laranjada é $\frac{1}{18}$.
>
> [Vão escrevendo na folha, de forma partilhada, e acabam com um grande sorriso]
>
> (Tomás e Tatiana, O, registada em áudio, Setembro 2001)

Como mostra a continuação da interacção, terem feito o esquema facilitou o cálculo da probabilidade quando o realizaram, posteriormente. Ajudou-os a identificar que o caso favorável era L, que representava a laranjada, assinalada com um círculo verde (Figura 74), bem como os casos possíveis, para cada um dos amigos que tinham ido ao bar da escola. Na Fala 15, o Tomás é o primeiro a utilizar o vocabulário científico (caso favorável, casos possíveis), mas vemos que a Tatiana, na fala seguinte (Fala 16) também usa a terminologia científica sem dificuldade, evidenciando rigor matemático. O entendimento entre eles é nítido, a resolução é rápida e o trabalho realizado é partilhado, pois ambos continuam a escrever alternadamente na folha de respostas, o que revela confiança um no outro e cumplicidade. Esta resolução também é por co-construção (César, 1994, 1998b; César et al., 2000). Cada nova fala procura mais rigor e que a resolução fique mais completa. Assim, na Fala 20, a Tatiana escreve a resposta. Nesta aula

estava presente um avaliador externo, que registou no seu relatório o que observou, em relação a esta díade.

> O Tomás e a Tatiana resolveram o problema muito rapidamente, escrevendo ambos na folha [de respostas] e, depois de terminarem, por iniciativa própria, abriram o livro e continuaram a trabalhar. Pareciam calmos e contentes, enquanto estavam na aula. Mas, o mais impressionante, foi a facilidade e segurança com que a Tatiana explicou a resolução deles, quando foi ao quadro. Notam-se imensos progressos, nela e nos outros alunos, que também foram ao quadro. (Avaliador externo, RAE, Setembro de 2001)

Este registo de alguém que, inicialmente, "achava o trabalho colaborativo uma brincadeira" (avaliador externo, CI, registada pela investigadora, Setembro 2000) e não acreditava que os alunos fossem progredir assim tanto, constitui uma forte evidência empírica. No projecto IC termos escolhido avaliadores externos, que elaboravam os relatórios para as entidades externas que financiavam o IC, entre os que não subscreviam o trabalho colaborativo e dialógico, foi um risco. Mas também constituía, quando eles elaboravam uma descrição como a acima transcrita, uma forte evidência empírica. Os avaliadores externos descreviam, inicialmente, esta forma de trabalho, em várias conversas informais, como "uma maneira de os alunos se divertirem", de "gostarem mais das aulas, mas não de aprenderem", ou "um faz-de-conta que aprendem" (avaliadores externos, CIs, registadas pela investigadora, Outubro 1999 a Julho 2000). Por isso, se, posteriormente, relatam formas de actuação, resoluções e progressos semelhantes aos que os elementos da equipa do projecto IC também observaram, ilumina como o trabalho colaborativo e dialógico é poderoso. Outra forte evidência empírica é que alguns deles, depois de serem avaliadores externos, pediram para participar em acções de formação e passaram a utilizar o trabalho colaborativo e dialógico nas turmas que leccionavam. Essa decisão revela como foi impactante, para eles, alguns com 20 ou mais anos de serviço, fazerem estas observações de aulas e verem os progressos dos alunos, bem como o clima de aula que existia.

É de realçar que, neste problema, a Tatiana e o Tomás começarem por uma estratégia de resolução por representação gráfica tornou mais rápida a

compreensão do que era pedido, pelo que esta díade foi uma das primeiras a terminar a resolução. Para além disso, um conteúdo que costuma ser mais complexo e, muitas vezes, pouco do agrado dos alunos, tornou-se mais fácil de ser apropriado, pois esta turma já estava habituada a usar diversas estratégias de resolução e a discuti-las, em paralelo, na discussão geral, após o trabalho em díade. Terem participado três anos no projecto IC tornou ainda mais impactante o trabalho colaborativo e dialógico. O acesso a diversas estratégias de resolução, o estarem habituados a terem de explicar como pensavam, o registarem, nos cadernos, formas alternativas de resolução, facilitaram que, nas provas de escola do final do 9.º ano de escolaridade (vulgo, exames), os alunos tivessem facilidade em manter as classificações que tinham obtido ao longo do ano lectivo. Isso nem sempre acontece quando eles não trabalham de forma colaborativa e dialógica. Também o recurso a mecanismos de *inter-empowerment*, que os alunos internalizaram, transformando-os em mecanismos de *intra-empowerment*, contribuíram para aumentar a auto-estima positiva, modificando a representação social deles, enquanto aprendentes. Isso ajudou a que as provas de avaliação externa fossem desdramatizadas, fazendo-os encará-las como apenas mais um instrumento de avaliação.

Algumas das tarefas que analisámos, como o IACC ou a tarefa com as balanças desenhadas, da díade V. e M., tinham sido elaboradas pela equipa do projecto IC. Outras eram adaptadas ou selecionadas pelos professores/investigadores que, por vezes, as descobriam em livros, artigos, ou as tinham conhecido e discutido em eventos da especialidade, uma vez que todos eram membros da Associação de Professores de Matemática (APM), que era bastante activa na organização destes eventos e na publicação de revistas e livros da especialidade. Uma tarefa bastante aberta, proposta no final do 9.º ano de escolaridade, quando os conteúdos programáticos já tinham sido leccionados, era das que já tinha sido discutida em eventos da especialidade, sendo usada por vários professores, dentro e fora da equipa do IC. Este tipo de tarefas, que não estava relacionado com os conteúdos programáticos daquele ano de escolaridade, era muitas vezes utilizado para ver como os alunos abordavam problemas que não constavam dos manuais escolares e que os desafiavam a pensar matematicamente. Abrantes (1994) e Abrantes e suas colaboradoras (1999), bem como outros educadores

matemáticos internacionais, trabalhando com diversas culturas (César & Kumpulainen, 2009; Cobb, 2006, 2012; Ligorio & César, 2013) consideravam que estas práticas eram algo que se devia fomentar.

Esta aula estava a ser registada em vídeo, pelo que havia um observador interno, que se deslocava com a câmara de vídeo e que, além de filmar o que os alunos registavam nos cadernos, antes de usarem a folha de respostas, também elaborou, posteriormente, um relatório sobre o que observara. Tratando-se de uma turma que já participava no projecto IC há três anos, os alunos estavam habituados a que algumas aulas eram filmadas e não se distraíam, nem deixavam de interagir, quando ele se aproximava. Como o vídeo não captava bem o som das interacções em cada díade. Em cada mesa havia também um gravador, onde era feito um registo áudio. Curiosamente, nesta aula também estava uma observadora externa, que não acreditava que fosse razoável usar esta tarefa no ensino básico, pois achava-a demasiado difícil e pensava que seria rejeitada, pelos alunos. Como tal, sabendo que já a tínhamos utilizado noutras ocasiões, pediu à coordenadora do IC para estar presente numa turma em que isso acontecesse. Portanto, havia duas pessoas extra, adultas, que os alunos percebiam serem professores de Matemática. Mas isso não os intimidou.

Nesta última aula, era frequente que se permitisse que os alunos escolhessem com quem queriam trabalhar, como relata César (2013a), quando analisa a resolução desta tarefa, mas noutra turma (V. e M.). Nessa análise discute-se, pormenorizadamente, o que este tipo de escolhas permite observar e como confirma, de forma prática, se os princípios subjacentes ao projecto IC foram interiorizados, pelos alunos, mesmo quando apenas participam numa turma deste projecto durante um ano lectivo. Tanto o V. e a M., que não tinham voltado a estar na mesma díade, como o Tomás e a Tatiana que, participando no projecto IC durante três anos, já tinham trabalhado um com o outro mais de uma vez, escolheram logo que queriam voltar à sua díade inicial. Observámos com bastante frequência este fenómeno, sobretudo quando aquelas pessoas se tinham tornado amigas, admiravam as capacidades e competências um do outro e, antes de trabalharem em díade, nunca imaginariam que isso fosse possível. Também era mais frequente quando ambos consideravam que tinham progredido muito por trabalharem com o outro. Isso acontecia mesmo que, como sucedeu com a M., isso não se refletisse

nas classificações finais, pois ela já tinha obtido Nível 5, o máximo possível, em anos lectivos anteriores a ter participado no projecto IC.

É curioso notar que, apesar do V. também ser quem lidera a resolução desta tarefa e de ter recorrido a um raciocínio espacial e a uma estratégia de resolução por representação gráfica, a figura que ele imaginou, bem como a generalização que fez, posteriormente, são muito distintas das que usou a Tatiana (César, 2013a). Isso ilustra como as discussões gerais podem ser muito ricas, pois alunos que recorrem ao mesmo tipo de raciocínios e estratégias de resolução, podem elaborar representações gráficas, estratégias de resolução aritméticas ou algébricas bastante diferentes, que importa explorar. A meta-análise de todo o *corpus* empírico do IC mostra que o esquema esboçado pelo V., na resolução desta tarefa, é mais frequente do que o da Tatiana, que só vimos em mais duas resoluções, noutras turmas. Por isso, pareceu-nos interessante analisar a resolução da Tatiana e do Tomás.

Como era frequente nesta díade, o Tomás inicia a interacção, mas começa por uma pergunta, pois quer saber se a Tatiana tem alguma ideia de como resolver a tarefa (Fala 1). Isto tem implícito que ele não sabe como começar. Reconhece que, sendo uma tarefa aberta, que não está relacionada com os conteúdos programáticos daquele ano de escolaridade, é para pensarem, ou seja, têm de recorrer a raciocínios matemáticos diferentes e não a conhecimentos já apropriados, em aula. Esta característica é reforçada pela Tatiana (Fala 2), quando salienta que aquela tarefa costuma ser resolvida no ensino secundário. No entanto, em vez de se sentirem intimidados por isso, o Tomás considera que isso mostra que a professora/investigadora os acha "bué espertos" (Fala 3), ou seja, eles encaram aquele desafio como uma prova da confiança dela nas capacidades e competências deles. Isso mostra que tinham conseguido internalizar os mecanismos de *inter-empowerment* que a professora/investigadora usara, transformando-os em mecanismos de *intra-empowerment*, a que agora já recorriam autonomamente, noutras situações. Se compararmos, por exemplo, a baixa auto-estima positiva da Tatiana, no IACC ou na primeira tarefa que analisámos, com a maneira como reage a este problema, apercebemo-nos de que existe uma enorme diferença.

Problema – Quantos apertos de mão serão dados numa festa, se cada um dos 15 convidados só apertar uma vez a mão de cada um dos restantes convidados?

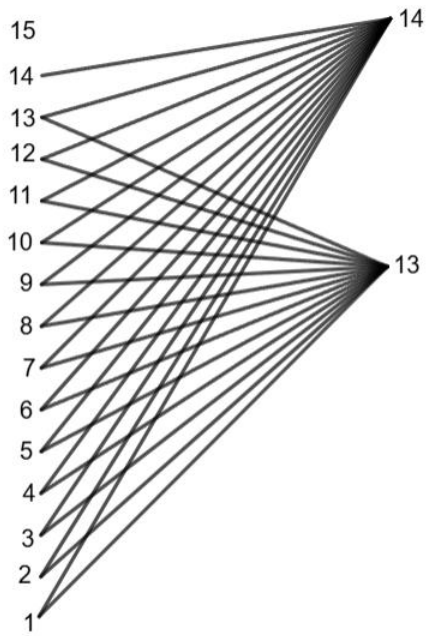
1. TO – Tens alguma ideia? A ‘stora disse que era um problema aberto... por isso não é nada que já aprendemos nas aulas, é para pensarmos...
2. TA – Pois, até porque ela disse que alguns alunos resolvem-no no secundário...
3. TO – Deve achar que somos bué espertos, para também conseguirmos fazer isto...
4. TA – Eu só sei pensar com esquemas... quando é algo novo... Já sabes isso...

[Pega no caderno e desenha uma figura, que representa os apertos de mão dados pelas pessoas 15 e 14, enquanto o Tomás olha, muito atento, mas também espantado, para o que ela faz]

(Tomás e Tatiana, O, registada em vídeo e áudio, Junho de 2002)

Figura 75

Esquema desenhado pela Tatiana



Depois de esboçar a Figura 75, com muito rigor, pois as linhas estão nítidas e rectas, o vértice bem desenhado, tornando a figura muito clara e fácil de perceber visualmente, a Tatiana começou a explicitar o esquema que elaborara.

5. TA – Este esquema mostra que a pessoa que, no esquema, se designa por 15, dá 14 apertos de mão, pois aperta a mão a todas as outras, mas não aperta a si própria.
6. TO – É o que puseste no primeiro feixe de rectas, que tem o 14 escrito no vértice...
7. TA – Isso, 'tás a perceber o esquema. A pessoa 14 aperta a mão a 13 pessoas... porque já tinha apertado a mão da 15 e não volta a fazer isso...
8. TO – É semelhante ao que dissemos antes...
9. TA – E não desenhei todos os outros, cada feixe de rectas, para o esquema não ficar confuso...
10. TO – Claro, e porque assim já dá para perceber... quer dizer... depois continuaria com a mesma lógica... A pessoa 13 dava 12 apertos de mão... e
11. TA – A pessoa 12 dava 11...
12. TO – e assim sucessivamente, até ao último aperto de mão, que seria só um...
13. TA – Bem, a última, não dava aperto de mão nenhum, porque já tinha apertado a mão a todos os outros...
14. TO – O quê? Essa não percebi...
(Tatiana e Tomás, O, registada em vídeo e áudio, Junho de 2002)

Quando a Tatiana começa a explicar o esquema que desenhou (Fala 5), o Tomás acompanha facilmente o raciocínio dela (Falas 6, 8, 10 e 12), mesmo tratando-se de um raciocínio espacial e de uma estratégia de resolução por representação gráfica (esquema), que não são as preferidas dele, cuja L1 é o português. Mas, como ele não tinha nenhuma ideia para começar a resolver a tarefa, foi a Tatiana que assumiu, brevemente, a liderança da resolução (Falas 2 e 4), recorrendo ao tipo de raciocínio e de estratégia de resolução que é natural, para ela, cuja L1 é o crioulo: um raciocínio espacial e uma estratégia de resolução por representação gráfica (esquema). Por isso, entre a Fala 5 e 12, a estratégia de resolução é co-construída (César, 1994, 1998b), explicando cada um deles, alternadamente, uma parte da resolução. Isso é particularmente nítido quando

observamos que eles vão completando o que o outro está a dizer, de uma maneira clara, rápida e organizada.

Enquanto a explicação se refere ao que fazem as pessoas que ainda dão apertos de mão, nem que seja apenas um, o Tomás consegue seguir o raciocínio da Tatiana, sem dificuldade. Porém, quando ela afirma que a última pessoa não dá nenhum aperto de mão (Fala 13), pois já tinha apertado a mão a todas as outras e cada uma apenas dava um aperto de mão às outras, o Tomás fica confuso e afirma que não está a perceber (Fala 14). Esta última explicação da Tatiana faz apelo ao raciocínio abstracto (RA), que ela tem mais desenvolvido e já conseguia mobilizar em todas as situações, como vimos na análise das suas resoluções no IACC. Nessa altura, o Tomás ainda precisava, por vezes, de recorrer ao raciocínio concreto (RC), embora também já conseguisse, noutras situações, mobilizar o raciocínio abstracto (RA), como mostrou o IACC e a resolução da primeira tarefa que analisámos. Ao longo destes três anos, ao trabalhar na sua ZDP (César, 2009; Vygotsky, 1934/1962), o Tomás foi desenvolvendo o raciocínio abstracto (RA), já o mobilizando em mais situações, em aula. Porém, quando confrontado com uma tarefa complexa e pouco habitual, sente necessidade de recorrer novamente ao raciocínio concreto (RC), algo que também é frequente observar-se. Por isso, esta explicação final foi mais confusa, para ele, o que levou a Tatiana a escolher um raciocínio analítico e uma estratégia de resolução aritmética, preferenciais para ele, para lhe explicar o que estava a querer dizer.

15. TA – Podemos escrever a nossa resolução assim, a seguir ao esquema, para se perceber melhor:

Pessoa 15 – Dá 14 apertos de mão
Pessoa 14 – Dá 13 apertos de mão
Pessoa 13 – Dá 12 apertos de mão

16. TO – Deixa-me continuar, para ver se percebi tudo...

Pessoa 12 – Dá 11 apertos de mão
Pessoa 11 – Dá 10 apertos de mão
Pessoa 10 – Dá 9 apertos de mão
Pessoa 9 – Dá 8 apertos de mão [Respira fundo]

17. TA – Descansa um bocadinho, eu digo os próximos, mas és tu que acabas, sim?

Pessoa 8 – Dá 7 apertos de mão
Pessoa 7 – Dá 6 apertos de mão
Pessoa 6 – Dá 5 apertos de mão
Pessoa 5 – Dá 4 apertos de mão

18. TO – Já posso continuar, só tinha ficado cansado...

Pessoa 4 – Dá 3 apertos de mão
Pessoa 3 – Dá 2 apertos de mão
Pessoa 2 – Dá 1 aperto de mão
Pessoa 1 – Dá 0 apertos de mão

19. TA – Já percebeste?

20. TO – Já. Escrevendo assim, todos de seguida, é fácil perceber. Mas tu foste mais esperta, percebeste logo, mesmo só tendo feito o esquema para as duas primeiras pessoas.

(Tatiana e Tomás, O, registada em vídeo e áudio, Junho de 2002)

A estratégia de resolução que a Tatiana resolve utilizar, nesta segunda fase da resolução, para que o Tomás perceba que a última pessoa já não dá nenhum aperto de mão (Falas 15 a 18), atinge o que ela pretendia, como se vê nas Falas 18 e 20. Quando há uma enumeração do que sucede a cada pessoa que estava na festa, ou seja, quando só é necessário mobilizar o raciocínio concreto (RC), o Tomás não tem qualquer dificuldade em perceber que a Pessoa 1 já não dá nenhum aperto de mão. Aqui, ele já não tem de visualizar o que não está representado no esquema (RA), apenas tem de continuar a enumeração para cada pessoa (RC). Portanto, consegue ser ele a concluí-la. Mas acha que a Tatiana foi "mais esperta" (Fala 20), o que equivale a perceber que ela tem acesso ao raciocínio abstracto (RA) em todas as situações, enquanto ele nem sempre o mobiliza. O Tomás julga que isso significa que ela é mais esperta, quando corresponde apenas a um nível de desenvolvimento mais avançado, naquele momento, como afirmam César (1994), Machado (2014) e Ventura (2012).

Ultrapassada esta dificuldade do Tomás, faltava-lhes explicar como tinham procedido, calcular o número total de apertos de mão e escrever a resposta final, na folha de respostas.

21. TA – Assim, temos a resposta completa. Fazemos o esquema, que ilustra como começámos a pensar. Depois, escrevemos que, se fizéssemos o esquema para cada um, ficava com demasiadas linhas e se tornava confuso.
22. TO – Por isso, escrevemos o que acontecia a cada um deles...
23. TA – E para sabermos o número total de apertos de mão...
24. TO – É só somarmos estes números todos [aponta para o número de apertos de mão que cada um deles dá] e usarmos a calculadora [Pega nela, a TA dita e ele escreve]
25. TA – Já sabemos: são 105 apertos de mão.
26. TO – Vou escrever – R: São 105 apertos de mão no total.
27. TA – Feito! Sabemos explicar tudo?
28. TO – Saber, sei. Se for ao quadro, não consigo é fazer um esquema tão direitinho como o teu...
29. TA – Se souberes explicar, isso não tem importância. No quadro é mais difícil desenhar.

(Tatiana e Tomás, O, registada em vídeo e áudio, Junho de 2002)

A explicação começa a ser elaborada pela Tatiana, que também tinha sido quem tinha feito o esquema, com que iniciaram a resolução da tarefa (Fala 21). Além de explicar que começaram por esboçar aquele esquema, também explicitou porque não fizeram o esquema para cada pessoa, pois este tornava-se confuso, o que os levou a escrever o que acontecia a cada pessoa, como afirma o Tomás (Fala 22). Depois, ambos compreendem que, para saberem o número total de apertos de mão, têm de adicionar os apertos de mão que cada pessoa deu (Falas 23 e 24), o que totaliza 105 (Fala 25). Para esta operação, usaram a calculadora, mas até esta tarefa foi desempenhada de maneira partilhada: um ditava, o outro escrevia. Como sabem que os problemas devem ter uma resposta final, o Tomás explicita-a (Fala 26), dizendo que a vai escrever na folha de respostas, pois há o acordo tácito da Tatiana. Como afirmam Reinke, Stephan e Cobb (2024), é importante que as tarefas propostas, em aula, permitam partir de raciocínios informais para, depois, os alunos serem capazes de progredir para uma maior formalização.

> Raciocinar com representações informais ou pré-formais pode servir como modelo das situações problemáticas iniciais e, fundamentalmente, pode tornar-se um modelo para interpretar e trabalhar em situações análogas (Gravemeijer, 1999; Streefland, 1985). Finalmente, com o apoio adequado, os alunos podem começar a raciocinar ao nível formal e podem usar convenções formais e algoritmos para representar o seu raciocínio. (Reinke et al., 2024, p. 34)

O processo que estes autores descrevem, de passagem de um raciocínio informal, como o que está patente na representação gráfica usada pela Tatiana, para um mais formal, não é tão nítido na resolução desta díade. Mas é muito claro na resolução do V. e da M., analisada em César (2013a), uma vez que o nível de formalização que o raciocínio do V. atinge é mais elevado. Como ele também começa por uma representação gráfica baseada num exemplo concreto (mesa com quatro alunos, que dão apertos de mão), a progressão até à formalização final está ilustrada de forma muito nítida e mostra a importância de deixar os alunos partirem das suas formas naturais de raciocínio e estratégias de resolução. Isso facilita que, depois, atinjam níveis de formalização até mais avançados do que os previstos naquele ano de escolaridade.

Como é habitual na díade da Tatiana e do Tomás, que tem processos interactivos muito ricos, a maioria baseados numa co-construção das estratégias de resolução (César, 1994), na folha de respostas escreveram alternadamente, de forma partilhada. No final do processo interactivo (Falas 27 a 29), afirmam que ambos sabem explicar a estratégia de resolução e os raciocínios que usaram, mostrando que aderiram às regras do contrato didáctico negociadas com a professora/investigadora, desde o início do 7.º ano de escolaridade. O Tomás (Fala 28) apenas está preocupado por não conseguir fazer aquele esquema "direitinho", se for ao quadro, algo que a Tatiana desvaloriza (Fala 29), tranquilizando-o. Portanto, esta díade apresentou uma estratégia de resolução muito interessante, porque parte de uma abordagem global, um raciocínio espacial e de uma estratégia de representação gráfica (esquema), preferidos pela Tatiana, cuja L1 é o crioulo. Mas, depois, recorre também a uma abordagem passo-a-passo, vendo o que acontece a cada pessoa, a um raciocínio analítico e a uma estratégia que associa uma composição matemática a uma estratégia aritmética, preferenciais para o Tomás,

cuja L1 é o português. O recurso a esta composição matemática, em que detalham o que acontece a cada pessoa, faz com que o cálculo do número total de apertos de mão esteja facilitado, pois não têm de fazer nenhuma generalização, como aconteceu com o V. e a M., que partiram de um exemplo concreto: simular o que acontecia numa mesa, onde estivessem quatro pessoas (César, 2013a), o que implicou que, depois, precisassem de generalizar, atingindo um nível mais elevado de formalização. Estes dois exemplos mostram como se fomentarmos as estratégias naturais de resolução das tarefas, os diversos alunos, com capacidades e competências distintas, conseguem ser bem-sucedidos, fomentando o seu desenvolvimento e as aprendizagens.

Há ainda um comentário, que o Tomás faz e que não escrevem na folha de respostas, mas que nos parece importante analisar. Quando já tinham terminado, ele olhou para o que tinham escrito na folha de respostas e disse à Tatiana:

> 30. TO – Podíamos ter poupado trabalho, se tivéssemos feito três ou quatro pessoas e, depois, escrevêssemos "e assim sucessivamente", não achas? Foi um bocado seca, escrever aquilo tudo... e também vai ser, se formos ao quadro...
> 31. TA – Mas, assim, não percebias que a última pessoa não dava nenhum aperto de mão...
> 32. TO – Pois, mas agora, que já percebi, o "e assim sucessivamente", ficava a matar... Além disso, lembrei-me agora, que um primo meu, anda a estudar sucessões... na faculdade... Será que é isso que se pode aprender com esta tarefa?
> 33. TA – Não sei, mas podes perguntar à 'stora, no intervalo.
> (Tomás e Tatiana, O, registada em vídeo e áudio, Junho de 2002)

A última parte deste episódio interactivo, já posterior à resolução da tarefa, é muito interessante. Eles perceberam que havia colegas que ainda não tinham terminado a resolução e, sendo a última aula, mantiveram-se sossegados, enquanto esperavam pela discussão geral, mas não iniciaram a resolução de outra tarefa, como os tínhamos visto fazer noutras aulas, ao longo dos três anos lectivos. Continuam a interagir sobre o que fizeram e o Tomás, associa o "e assim sucessivamente" a esta tarefa poder ser usada no estudo das sucessões, um conteúdo programático que desconhecem, pois é estudado em anos de escolaridade

mais avançados, mas de que o Tomás tinha ouvido falar, a um primo que já estava a frequentar o ensino superior. A Tatiana sugere que perguntem à professora/investigadora, no intervalo, o que revela três pontos importantes: (1) mesmo quando já terminaram a resolução da tarefa, os alunos continuam a analisar criticamente o trabalho que realizaram; (2) o trabalho colaborativo e dialógico, numa comunidade de aprendizagem (Civil, 2007), promove as conexões matemáticas e a curiosidade, inclusivamente em relação a conteúdos de anos mais avançados, lecionados noutros anos de escolaridade; e (3) como se fomentou um espaço de pensamento (Perret-Clermont, 2004), nas aulas de Matemática, os alunos sentem-se à-vontade para questionarem a professora/investigadora sobre as suas dúvidas e curiosidades, algo essencial para promover as aprendizagens matemáticas e o desenvolvimento, bem como o prazer de pensar, algo que Zittoun (2023) considera essencial.

Como afirmámos, esta aula teve a participação de um observador interno, da equipa do projecto IC, mas docente noutra escola, e de uma observadora externa, tendo cada um deles elaborado um relatório, em que detalhavam aspectos significativos da observação que tinham realizado. Esta turma participou no projecto IC durante três anos (3.º ciclo do ensino básico), pelo que ambos já tinham observado outras aulas, conhecendo desempenhos anteriores do Tomás e da Tatiana. O observador interno, realçou o que mais o impressionou, nesta aula.

> Geralmente, quando se segue um contrato didáctico tradicional, nas últimas aulas [do ano lectivo], quando já terminaram os conteúdos, os alunos estão muito pouco empenhados, perguntando se não podem sair mais cedo. Nada disso aconteceu aqui, onde se mantiveram concentrados, a trabalhar, mesmo quando sentiam algumas dificuldades, por se tratar de uma tarefa complexa, que não estava relacionada com os conteúdos que tinham estudado naquele ciclo do ensino básico.
>
> Esse é outro critério interessante, para se perceber as potencialidades deste novo contrato didáctico e do trabalho colaborativo: perante uma tarefa inovadora, complexa, fora do habitual, os alunos reagem empenhando-se na sua resolução, sem se queixarem porque não faz parte do programa, ou não vai sair nos testes e exames. Aliás, nunca ouvi este argumento, nas nove ou dez aulas a que assisti, ao longo destes três anos. Os alunos queriam participar, aprender e, apesar de

> haver uma avaliação sumativa, cujos critérios e instrumentos de avaliação eles conheciam, não invocavam os testes ou exames, nos comentários que faziam. (Observador interno, RI, Junho de 2002)

Há diversos pontos que importa salientar neste excerto do relatório do observador interno: (1) apercebemo-nos, pelo vocabulário utilizado, que é alguém da equipa do IC, pois conhece a nomenclatura científica utilizada neste projecto (ex: contrato didáctico, trabalho colaborativo); (2) é um professor já com alguns anos de experiência como docente, o que o leva a estabelecer conexões entre o que observou naquela aula e noutras aulas, de outras escolas, no final do ano lectivo, realçando que, nesta aula, nenhum aluno focou sequer a hipótese de saírem mais cedo, algo frequente na última aula de um ano lectivo; (3) ficou favoravelmente impressionado pela concentração e empenho dos alunos, numa tarefa complexa e que não abordava conteúdos programáticos daquele ciclo de escolaridade; (4) nas várias aulas a que assistiu, nunca ouviu os alunos usarem o argumento do teste ou do exame para justificarem o seu empenho na resolução das tarefas, ou a falta dele; e (5) salienta que os alunos querem é participar na aula, aprender, o que é próprio de uma comunidade de aprendizagem (Civil, 2007). Implicitamente, reconhece que os alunos se sentem à-vontade, existindo um clima agradável, onde todos estão a trabalhar e sentem que podem agir como participantes legítimos (César, 2009, 2013a; Lave & Wenger, 1991), algo fundamental para promover uma educação matemática crítica (Frankenstein, 1983, 2012; Skovsmose, 2022, 2023), bem como uma educação intercultural e inclusiva (Armstrong & Moore, 2004; César, 2013a, 2013b, 2024b; César et al., 2014; Kollosche, Marcone, Knigge, Penteado, & Skovsmose, 2019; Skovsmose, Moura, & Carrijo, 2023).

> Por isso, o que mais me impressionou foi, com a complexidade do cenário – uma pessoa (eu) em pé, com uma câmara de vídeo, a circular entre as mesas; por vezes, a debruçar-se sobre as mesas, para apanhar melhor um desenho, esquema, ou o que tinham escrito no caderno; gravadores em todas as mesas; uma observadora externa – e, apesar disso, o empenho com que eles trabalharam, sem se distraírem quando me aproximava, mas atentos a tudo, pois

> aproximavam o caderno, para eu filmar mais facilmente, enquanto não paravam de dialogar, porque sabiam que o gravador áudio estava a funcionar. Assumiram o papel de participantes legítimos nesta investigação com um empenho, como nunca julguei ser possível, sobretudo no ensino básico, em que se descrevem tantos comportamentos disruptivos. (Observador interno, RI, Junho de 2002)

As características que começa por descrever são tanto mais extraordinárias, quanto ele reconhece que, aquele cenário, era tudo menos habitual: havia uma pessoa que circulava com uma câmara de vídeo, que se debruçava sobre as mesas para filmar detalhes, gravadores nas mesas, uma observadora externa, que também podia circular pela sala, ou seja, muitos elementos que poderiam ter sido distractores, que podiam ter originado mais agitação e menos concentração na resolução da tarefa. Porém, os alunos mantinham-se concentrados no trabalho que estavam a realizar embora, paralelamente, revelassem sensibilidade e maturidade emocional suficientes, para aproximarem o caderno, facilitando a filmagem. Contudo, não deixavam de falar, pois sabiam que as interacções estavam a ser gravadas em áudio. Esta capacidade de concentração, de empenho, fossem quais fossem as condições de trabalho, foi o que mais o impressionou, tanto mais que se tratava de adolescentes, tantas vezes descritos, noutros trabalhos e por outros professores, como perturbadores, provocadores ou pouco empenhados. Isso leva-o a considerar que os alunos "assumiram o papel de participantes legítimos nesta investigação", ou seja, eles querem que a filmagem fique bem, que na gravação se oiçam os seus diálogos, que fique registado o que acontece. Por isso, é mais do que serem participantes legítimos naquela comunidade de aprendizagem (Civil, 2007), é também o serem na própria investigação, como é característico da investigação intercultural e inclusiva (Allan & Slee, 2008; Armstrong & Moore, 2004; César, 2010, 2013b, 2017, 2024b; Machado & César, 2025), ou seja, a própria investigação constitui um instrumento de empoderamento dos participantes.

A observadora externa estava presente por considerar aquela tarefa inapropriada para alunos deste nível de escolaridade. Por isso, como nos disse numa conversa informal, uns meses antes, pensava que, naquele caso, iria haver alunos que se negavam a fazê-la e, que, podendo até estar sossegados, pela relação

cordial que tinham estabelecido com a professora/investigadora, não íam fazer nada e manteriam apenas conversas paralelas, sobre temas exteriores à aula. Esta convicção era reforçada por ser a última aula do ano lectivo e já saberem as classificações finais do 3.º período, sendo também o final de um ciclo de escolaridade, pelo que seria provável não terem aquela docente no ano lectivo seguinte. Uns, porque começavam a trabalhar, outros porque íam para cursos profissionais, noutras escolas, outros ainda porque escolheriam áreas de estudo, no ensino secundário, onde a disciplina de Matemática não era obrigatória, enquanto os restantes mudariam de professor. Em síntese: ela achava um disparate propormos aquela tarefa e esperava ver agitação, descontentamento, rejeição da tarefa, por parte dos alunos, tanto mais que isso já não teria consequências para a avaliação sumativa, que já fora discutida com eles, na aula anterior. Para esta observadora externa, a avaliação sumativa era uma ameaça possível, que evitava formas de agir e reagir desajustadas. No IC, a avaliação sumativa era algo que pretendíamos que fosse transparente, que era falado, quando os alunos perguntavam algo sobre os critérios de avaliação, ou mostravam ter alguma dúvida, mas retirávamos-lhe o carácter punitivo que outros lhe conferem. Pretendíamos desdramatizar os momentos e instrumentos de avaliação sumativa. Queríamos que os alunos tivessem gosto em aprender Matemática, em participar nas aulas e que fosse isso que os motivasse a estarem empenhados, ou seja, promovíamos uma motivação intrínseca, baseada no prazer de pensar (Zittoun, 2023).

> Devo clarificar que, quando pedi para assistir a esta aula, foi porque esta tarefa me pareceu tão disparatada para o ensino básico que, mesmo numa turma que tinha progredido muito, em termos de comportamento e classificações obtidas em Matemática, achei que iria provocar reacções negativas, por parte dos alunos. Esperava que, muitos deles, não fizessem nada ou estivessem ocupados com actividades paralelas, que não tinham a ver com a aula. Portanto, as minhas expectativas, à partida, eram bastante negativas.
>
> Quando soube que seria gravada em vídeo, com uma pessoa a circular entre as mesas, pensei que a aula se ia transformar num circo: uma tarefa difícil, uma pessoa a filmar, tinha tudo para dar errado. Mas, mais uma vez, enganei-me. Esta equipa, não pára de me surpreender.

> Os alunos reagiram muito bem a uma tarefa diferente, que não tinha nada a ver com os conteúdos deste ciclo, nem constava do exame final. Não se sentiram intimidados pela complexidade da tarefa. Começaram logo a dialogar, a tentar resolvê-la, a procurar soluções, e mantiveram-se empenhados, nem eu sei como, com o calor que estava na sala e a pessoa que andava por entre as mesas e, vira não volta, inclinava-se sobre eles, para filmar o que estava nos cadernos. Acho que aquela dança me distraía e incomodava mais a mim, que sou adulta e professora, do que a eles, que pareciam tão empenhados, que nem davam pela confusão que a filmagem, para mim, causava. (Observadora externa, RE, Junho de 2002)

Como ela afirma, as expectativas que tinha eram muito negativas. Tudo lhe parecia um disparate: a tarefa, o cenário, a altura do ano lectivo escolhida, com as classificações já atribuídas e o calor inerente. Por isso, achou que aquela aula iria ser "um circo", com alunos desmotivados, sem conseguirem resolver a tarefa, desatentos, pelo que se passava à sua volta, devido às filmagens, a conversarem de outros assuntos. Mas, como reconhece depois, enganou-se. A professora/investigadora tinha visto a reacção dos alunos ao IACC, na primeira aula do 7.º ano de escolaridade. Também são tarefas pouco habituais e isso levou-os a participar, a tentar resolvê-las, pois sabiam que podiam usar qualquer tipo de raciocínio e estratégia de resolução. Depois, tinha trabalhado com esta turma durante três anos lectivos e observado a evolução deles, enquanto alunos e comunidade de aprendizagem (Civil, 2007). Sabia como participavam e interagiam com os pares, em aula. Tudo isso a levava a acreditar que iriam gostar daquela tarefa desafiadora, empenhando-se nela. Foi o que veio a suceder, como reconhece a observadora externa, que afirma mesmo, que a filmagem e o calor a incomodavam mais a ela, do que aos alunos. Foi ela quem teve mais dificuldade em estar concentrada, atenta, a tomar notas, para depois escrever o relatório.

Para eles, aquela era apenas mais uma aula com filmagens. Tinham existido várias e, a partir da segunda ou terceira filmagem, ainda durante o 7.º ano de escolaridade, os alunos aprenderam a estar concentrados e empenhados, independentemente do que acontecesse na sala, ou mesmo no exterior, onde as aulas, no piso térreo, podiam ser barulhentas se fossem perto de onde decorriam, por exemplo, os campeonatos desportivos. Essa capacidade de atenção concentrada, de

mergulharem no trabalho, era algo que o projecto IC também queria promover, porque é essencial para as aprendizagens. Também é fundamental nos momentos de avaliação sumativa que recorrem a instrumentos de avaliação mais formais, como os testes individuais ou as provas nacionais de avaliação externa (vulgo, exames). Por isso, se eles aprendessem a trabalhar concentrados, em aula, isso seria também uma vantagem, noutros contextos, cenários e situações.

> Passando à parte mais importante, eu esperava um rotundo falhanço desta aula. Alunos desatentos, desempenhos matemáticos medíocres, uma discussão geral em que tivesse de ser a docente a explicar tudo, ou quase tudo. Mas, onde mais me enganei, foi quanto às respostas dos alunos. Não só conseguiram resoluções brilhantes, como as sabiam explicar sem dificuldade, quando foram ao quadro, respondiam a perguntas e dúvidas, sem ficarem embaraçados, mesmo quando fui eu a levantar algumas questões. Tinham uma capacidade de argumentação espantosa, sobretudo se pensar o que era esta turma, no início do 7.º ano, quando vim cá pela primeira vez.
>
> Aprenderam Matemática, a ultrapassar dificuldades, se ainda não conseguiram, tentam novamente, há um clima de entreajuda, entre colegas de pares diferentes, impressionante, um respeito e capacidade de escuta, quando os colegas estão no quadro. Mais espantoso, ainda, usam expressões como "estratégia de resolução", "representação gráfica", "raciocínio geométrico", "raciocínio analítico", coisas que nunca ouvi miúdos desta idade dizerem, nem professores.
>
> Se não tivesse visto, se não estivesse naquela aula, achava que isto era tudo inventado, quando lesse artigos ou ouvisse comunicações, no ProfMat [encontro de professores de Matemática, organizado pela APM]. (Observadora externa, RE, Junho de 2002)

Naquilo que esta avaliadora externa considera mais importante, o comportamento, as resoluções em díade e a discussão geral, que ela designa por "ir ao quadro", esperava que esta aula fosse "um rotundo falhanço". Mas, como reconhece, enganou-se. Os alunos estiveram empenhados, elaboraram "resoluções brilhantes", que sabiam explicar, sem dificuldade, durante a discussão geral. Esta turma estava habituada, desde a 2.ª semana do 7.º ano de escolaridade, a explicar, na discussão geral, o trabalho que tinham realizado em díade ou em pequenos

grupos. Por isso, como vemos através das interacções entre pares que analisámos, mesmo durante a resolução das tarefas, eles tinham a preocupação de perceber se sabiam explicar tudo detalhadamente. Se fossem eles a ir ao quadro, durante a discussão geral, queriam representar bem a díade ou o pequeno grupo. Por isso, geralmente conseguiam explicar sem dificuldade e, se havia algo em que precisavam de ajuda de um colega, para completar ou explicitar melhor um detalhe, pediam-na e geriam, eles próprios, uma grande parte da discussão geral. Isto estava de acordo com a distribuição do poder, sentido de responsabilidade e autonomia, que o projecto IC também pretendia fomentar.

Salienta, de forma explícita, a enorme evolução que esta turma teve, confrontando o que observou nesta aula com o que viu no 7.º ano de escolaridade, quando realizou as primeiras observações. Este ponto, constitui uma forte evidência empírica, ao ser focado por alguém descrente quanto à utilidade do trabalho colaborativo e dialógico, como acontecia com esta observadora externa. As primeiras observações decorrem cerca de dois meses depois das aulas terem começado. Portanto, há progressos que ainda estão numa fase mais embrionária, tanto no que se refere aos desempenhos matemáticos, como aos processos interactivos. Para além disso, a primeira vez que há observadores externos na aula, isso constitui uma novidade. Por isso, é de esperar que haja um pouco de perturbação, que passa à medida que os alunos percebem que, de vez em quando, têm alguém externo a assistir às aulas. Assim, numa turma que participa três anos lectivos no IC, as diferenças entre as primeiras aulas observadas e as últimas foram sempre descritas, pelos diversos observadores externos e internos, como muito significativas.

Também considerou estranho algo que observou: os alunos nem sequer se sentiram intimidados, quando foi ela a levantar algumas questões, a que eles conseguiram responder, sem dificuldade. As turmas do projecto IC estão habituadas a que, por vezes, há observadores nas aulas. Sabem que eles podem circular pela sala (excepto durante a discussão geral), interagir com os alunos, em determinados momentos, e acreditam que, se a professora/investigadora os deixa estar ali, é porque confia nessas pessoas, atitude que os alunos também assumem. A única regra que os observadores externos e avaliadores externos têm de respeitar é que não sugerem formas de resolução, nem respondem às questões dos alunos a não

ser com outras perguntas, que fomentem uma reflexão mais aprofundada. Esta regra, que parece muito simples, revelou-se bastante complexa, pois eles estavam habituados a explicitarem o que os alunos deviam fazer, ou mesmo a escrever nos cadernos deles. Mas acabou por ser respeitada. Portanto, aquela pessoa questioná-los, para eles, era como se a professora/investigadora os questionasse, e isso não tinha nada de ameaçador, como refere César (2009, 2013a, 2013b). Era apenas interesse pelo seu trabalho, pelas suas estratégias de resolução e raciocínios, escuta atenta ao que o outro dizia, algo que eles apreciavam, que viam como positivo.

Naquela turma, tal como nas outras turmas que participavam no IC, havia um clima de interajuda, de solidariedade. Ao fim de três anos de trabalho colaborativo e dialógico, eles já tinham tido diversos pares e conheciam-se muito melhor do que na maioria das turmas, que não vivenciam esta modalidade de trabalho. Sem o trabalho colaborativo e dialógico, geralmente apenas conhecem os amigos do grupo em que participavam fora da escola. Ali, entre o trabalho em díade ou em pequenos grupos, e as discussões gerais, em que eles explicavam as suas resoluções, acabavam por saber bastante bem o que cada um gostava mais em termos de raciocínios e estratégias de resolução, ou onde tinha dificuldades. Isso tornou-se patente nas interacções do Tomás e da Tatiana, mas era semelhante em relação aos outros alunos. Por isso, o clima era agradável, descontraído, mas também exigente, de respeito, de escuta, de ajuda, ou seja, era uma comunidade de aprendizagem (Civil, 2007), onde existiam espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004) e onde se praticava uma educação intercultural e inclusiva (César, 2009, 2013a, 2013b, 2024b; César et al., 2014; César & Machado, 2024a, 2024b).

A parte final deste excerto revela algo que lemos diversas vezes nos relatórios dos observadores externos e de avaliadores externos: que, se não tivessem assistido às aulas, se não tivessem visto com os seus próprios olhos, achariam que estávamos a inventar, que o que descrevíamos não poderia ter acontecido. Este tipo de comentários, que alguns temiam que nos ofendessem, para a equipa do IC eram de esperar, por parte de quem não acreditava no trabalho colaborativo e dialógico, ou na educação intercultural e inclusiva. Por isso nos parecia tão importante que os observadores e avaliadores externos fossem quem não julgasse

aquela forma de trabalho algo desejável, que poderia promover os desempenhos dos alunos, mas numa formulação exigente do que são as aprendizagens matemáticas. Que, depois de alguns anos de observação, eles descrevam as aulas de uma maneira muito semelhante às descrições da equipa do IC, parece-nos uma evidência empírica fortíssima, porque aquela descrição vem de uma pessoa cujas expectativas eram as opostas.

Outro detalhe citado no relatório, o recurso a terminologia científica, por parte dos alunos, é algo que acontece por iniciativa deles próprios e que ilustra a pregnância do projecto IC, pois era algo que não estava previsto, quando este foi concebido. Ao longo dos anos, durante os intervalos e mesmo nos recreios, onde costumávamos estar e circular, pois constituíam um importante ponto de observação de como os alunos agiam e reagiam e facilitavam a existência de conversas informais, os alunos ouviam-nos discutir usando a terminologia científica, como raciocínio geométrico, ou estratégia de resolução aritmética. Por isso, foram-na aprendendo. Não estava previsto que o fizessem, nem houve qualquer acção deliberada, por parte da equipa do IC, que os levasse a fazerem essa apropriação de conhecimentos. Mas, habituados a escutar com interesse e a estarem atentos aos detalhes, os alunos foram apropriando aquele vocabulário, bem como levantando questões, em aula, em que nos perguntavam "É isto que vocês chamam raciocínio geométrico?" ou "Isto é uma representação gráfica?". Portanto, à medida que foram trabalhando no projecto IC que, durante os intervalos, nos ouviam a planificar o que íamos escrever em artigos científicos, ou preparar para apresentar em eventos da especialidade, foram-se interessando pelo que se fazia naqueles contextos e, apercebendo-se da terminologia utilizada, apropriaram-se dela.

A curiosidade era algo que mostravam ter em relação ao que desconheciam. Por isso, queriam saber o que se fazia nos congressos, como se divulgava o que sucedia nas aulas, que tipo de pessoas participava nesses eventos científicos. No geral, eles queriam saber como funcionava o projecto IC, o que era fazer investigação científica, para que servia. Isso tornou-se ainda mais nítido quando começámos a escrever sobre episódios que envolviam alunos, embora isso só acontecesse quando a turma já não participava no projecto IC, para os protegermos. Também não queríamos contaminar o que era docência, com a divulgação de dados da investigação, para eles se sentirem mais à-vontade para dizerem

"preferia que não mostrasse este excerto", se assim o desejassem. Por exemplo, a Tatiana pediu-nos, durante muitos anos, que ainda não usássemos os dados que se lhe referiam. A sua trajectória de participação ao longo da vida foi complexa e não se sentia, ainda, em condições de ver os dados que se lhe referiam publicados. Por isso, apesar de ela e o Tomás terem deixado de participar numa turma do IC em Junho de 2002, apenas em 2017 foi publicado o primeiro artigo em que esta díade é mencionada e excertos seus são analisados (César, 2017). Isto significa que esperámos 15 anos, para que a trajectória de participação ao longo da vida da Tatiana já estivesse mais consolidada. Nessa altura ela já se sentia mais segura e suficientemente empoderada para que a divulgação destes dados não pudesse ser contraproducente. É também a esta possibilidade de decidir, em cada momento, o que se pode, ou não divulgar, que faz o processo de investigação do projecto IC ser inclusivo, colaborativo e dialógico, algo que fazia parte dos seus objectivos (Machado, 2014; Ventura, 2012).

Aquilo a que chamamos consentimento informado (César, 2024b; César & Machado, 2024b, 2025), é concebido e posto em prática numa versão bem mais exigente do que a habitual, em que as autorizações apenas são concedidas antes da investigação começar e, geralmente, apenas pelos encarregados de educação, quando se trata de alunos menores de idade. O Tomás, há muito que gostaria que os dados deles fizessem parte da divulgação de resultados. Para ele, cuja trajectória de participação ao longo da vida tinha tido menos desafios, era mais fácil, como ele próprio reconhecia. Mas dizia-nos, quando isso era assunto, em entrevistas ou conversas informais: "Para mim, a vida é mais fácil. Por isso, fazemos como for melhor para a Tatiana. Escreve sobre nós quando ela estiver preparada. Eu quero muito participar nisso [na escrita], mas não quero que seja desconfortável para ela" (Tomás, E11, Julho 2007). A oportunidade surgiu quando a coordenadora do projecto IC foi convidada para participar num número especial de uma revista internacional, que tinha como tema *Migrações no Feminino* (César, 2017). Sabendo que esse tema era algo significativo para a Tatiana, que se manifestara em diversas entrevistas e conversas informais contra a discriminação de género, sendo muito crítica em relação às trajectórias de participação ao longo da vida de mulheres migrantes, falou com ela sobre este convite e a possibilidade de usar dados dela e do Tomás. Foi nessa altura que eles escolheram os seus

nomes fictícios, que agora utilizamos. A Tatiana não só acedeu, como se mostrou muito satisfeita com esta oportunidade e participou activamente no processo de leitura crítica do artigo, com comentários sobre o que estava escrito, antes da sua publicação. Como então referiu, numa conversa informal, "se soubesse que ler o que escreveu sobre mim, sobre nós, me fazia tão bem, já tinha aceitado fazer parte de artigos há mais tempo" (Tatiana, CI, presencial, registada em áudio, Janeiro de 2017). Desde aí, ela e o Tomás têm colaborado, com as suas leituras críticas, em vários artigos (César, 2017; César & Machado, 2024b) e, agora, neste livro, tal como aconteceu com o V. e a M., e muitos outros alunos, cujos excertos utilizámos, neste e noutros documentos de divulgação do IC.

Nessa altura, recordamos-lhe que, mesmo quando aceitavam que os dados deles pudessem ser utilizados, eles liam os artigos ou capítulos de livros previamente, pelo que podiam pedir que determinado excerto, ou parte dele, não fosse mencionado, ou que uma interpretação fosse modificada, ou complementada. Mas a Tatiana explicou-nos que não era isso que a preocupava. Era mesmo considerar que "não tinha cabeça para mais nada", como nos revelou numa conversa informal, para além de trabalhar e estudar. Esta é a maneira como designa a disponibilidade mental e emocional para se envolver noutros assuntos. Já tinha de trabalhar muito, para ganhar dinheiro e poder continuar a estudar, o que a deixava esgotada, física e emocionalmente. Como vimos anteriormente, também tinha de gerir os conflitos com a família, que preferia que ela deixasse de estudar, assim que concluísse o 9.º ano de escolaridade. Por isso, comprometer-se com mais outra tarefa era impossível, para ela, naquele momento.

> Naquela altura, quando disse que preferia que não usassem logo os meus dados, não era por não confiar em si, ou na minha professora e noutros [professores] que tinham estado nas aulas, ou não valorizar o trabalho que faziam. Eu reconheci, desde sempre, que se não tivesse participado nesse projecto, provavelmente não teria continuado a estudar e muitos colegas teriam continuado a ter negas [níveis de classificação negativos]. Portanto, sabia da importância que tinham tido para mim e outras pessoas do bairro.
>
> Mas eu tinha de lutar muito, muito, muito, para continuar a estudar. Trabalhava muitas horas, acordava muito cedo, ainda de madrugada, e ainda precisava de ter notas, na escola, que me permitissem entrar no curso que tinha escolhido.

> Por isso, não tinha cabeça para mais nada. Só me conseguia focar nisso, não me conseguia dispersar por outros assuntos, como a escrita de artigos científicos, que agora também faço, na Enfermagem. Mas, nessa altura, não tinha consciência da importância de divulgar resultados de investigações. Nem sabia bem o que isso era. (Tatiana, CI, presencial, registada em áudio, Janeiro 2017)

Curiosamente, hoje em dia, ela própria colabora em projectos de investigação, no domínio da Enfermagem, percebendo melhor a importância de divulgar os resultados. Por isso, valorizou ainda mais os artigos recentes que temos escrito e onde usamos dados referentes a ela e ao Tomás. Foi, aliás, por sugestão dela, que gravámos esta conversa informal, com o seu telemóvel, "pois podemos dizer algo importante, para o que vai ser escrito" (Tatiana, CI, presencial, registada pela investigadora, Janeiro 2017), como afirmou, antes de começarmos a gravá-la. Por isso, depois de ter feito uma especialização no estrangeiro e de participar em algumas investigações, a Tatiana tem mais consciência dos impactes que a divulgação de resultados pode ter.

É interessante salientar que ela afirma, explicitamente, que não querer que os dados fossem usados logo após terem sido recolhidos não se justificava por falta de confiança na equipa do IC, nem por desconhecer que os alunos seriam ouvidos sobre o que fosse escrito. Também não significava que não valorizasse o que o IC tinha feito naquela escola e em relação às pessoas do bairro, incluindo ela própria. Isso mostra que a noção de consentimento informado exigente, que subscrevíamos, era do conhecimento dos alunos e que estes tinham estabelecido uma relação de confiança com a equipa do projecto, algo que fazia parte dos princípios do IC (César, 2017, 2024b; Machado & César, 2024b, 2025; Ventura, 2012). Mas, como refere depois, naquela altura a Tatiana precisava "de guardar forças" para o essencial, de se proteger, o que a levava a não estar tão focada nos outros, como esteve na maior parte da sua trajectória de participação ao longo da vida, em que o tema da solidariedade está bastante presente.

> Se for completamente honesta, naquela altura, no secundário e no ano em que não estudei, eu tinha de me centrar em mim própria, nas minhas guerras e lutas. Tinha de guardar forças para isso. Por isso, talvez tenha sido um bocado egoísta,

> menos solidária e com menos consciência racial e de género, do que sou agora. Foi uma fase muito dura, muito centrada em mim, para conseguir chegar a tirar um curso no ensino superior.
>
> Foi também uma altura em que, muitas vezes, no bairro, me senti muito sozinha, porque ninguém compreendia o que eu queria fazer. Aqueles que me eram mais próximos achavam um disparate tirar um curso. É curioso porque, quando me sentia mais sozinha, ía falar consigo, para me animar. Procurava-a na escola, nos intervalos e nos furos [quando não tinha aulas]. Por isso, eu sentia que podia contar consigo. Mas ainda não tinha chegado à fase em que estou agora, em que me sinto capaz de partilhar a minha história, de a analisar e de aprender com isso, com essa análise. Agora, percebo que isso pode ajudar outras pessoas e também me pode fazer progredir a mim, enquanto pessoa e profissional. Agora, quero fazer isso (Tatiana, CI, presencial, registada em áudio, Janeiro 2017)

A consciência racial e de género que, entretanto, desenvolveu, levou a Tatiana a estar disponível para analisar a sua trajectória de participação ao longo da vida, que ela designa por "sua história", esperando que isso possa ajudar outras pessoas. As reflexões que tem feito, levam-na a perceber que, numa primeira fase, precisou de se centrar nela própria, para conseguir atingir o objectivo de tirar um curso no ensino superior. É uma fase em que foi menos solidária do que habitualmente, porque a dureza do horário de trabalho, conjugada com os estudos, lhe consumia toda a energia disponível. Porém, mesmo nesta altura, em que se focou nela própria e no bairro, quando se sentia muito sozinha, sabia que podia contar com a investigadora, para a escutar e animar, o que realça a importância do *follow-up*, que reforçava essa disponibilidade. Por isso mesmo, quando estava mais desanimada, procurava-a, na escola, e tínhamos algumas conversas informais, o que salienta a importância de os investigadores realizarem uma reflexão aprofundada sobre como saem de cena, quando a investigação termina, ou sobre a importância de existirem *follow-ups*, que atenuam os cortes abruptos que costumam existir quando se concluem os projectos de investigação-acção.

Depois, como afirma também, houve uma altura em que nem se lembrou disso e, quando surgiu o convite, achou que estava preparada e que seria interessante ver, passados tantos anos, como nós e eles olhavam para o que tinha sucedido. O trabalho colaborativo e dialógico passou, nestes artigos e livros, a ser

realizado num outro contexto: a escrita científica colaborativa e dialógica. Permitiu que os alunos sugerissem formas de completar as interpretações, se lembrassem de outras conversas ou resoluções que também seria interessante analisar e, por isso mesmo, as sessões de trabalho em que discutimos e analisámos partes dos textos, foram extremamente ricas e permitiram diversas aprendizagens, tanto para eles, como para os autores formais dos artigos e livros. Assim, a investigação inclusiva e intercultural constitui uma parte essencial do projecto IC, cujos objectivos, como mencionámos, incluíam a própria investigação, na qual os participantes também deveriam agir e reagir enquanto participantes legítimos (César, 2009, 2013b; Lave & Wenger, 1991), revelando *agency*.

> Entretanto, à medida que fui pensando no meu percurso, no que foram aquelas aulas do 7.º ao 9.º ano, no que mudou em mim nessa altura, e depois, também me apercebi de que aquelas aulas, do projecto, contribuíam para a formação de professores. A escola tinha estagiários, como o professor do V. e de outras turmas, que trabalhavam no projecto. Havia outros professores, que íam assistir às aulas, alguns com um ar muito desconfiado, no início... e depois já a acreditarem mais no que fazíamos, nas aulas... Eu própria já fiz acções de formação para enfermeiros... Por isso, agora, a questão da formação, é algo que me diz muito mais e percebo que artigos onde há partes de interacções, enquanto resolvíamos problemas, bocados de entrevistas e conversas informais, são muito importantes para a formação de professores.
>
> Quando fiz as minhas acções de formação, em Enfermagem, lembrei-me dos vossos artigos, sobre o V. e a M. que, entretanto, tinha lido, e também usei casos reais, partes de diálogos em que os doentes referiam como se tinham sentido, comentários de colegas. Acho que, através do que vos vi fazer, nos artigos, consegui tornar as minhas acções de formação mais práticas, mais interessantes, mais baseadas no vivido. (Tatiana, CI, presencial, registada em áudio, Janeiro 2017)

Neste último excerto, há diversos pontos importantes: (1) a revelação de que, desde que participou no projecto IC, fez reflexões sobre o seu percurso, o que ilumina que o sentido crítico e a reflexão, o prazer de pensar (Zittoun, 2023), que o IC procurava desenvolver, aconteceram mesmo noutros contextos,

cenários e situações; (2) um apurado sentido de observação que a levou, por exemplo, a aperceber-se da desconfiança inicial de alguns observadores externos, em relação ao contrato didáctico negociado com os alunos e utilizado, em aula; (3) a análise do que foram as aulas de Matemática, naqueles três anos lectivos, levaram-na a perceber a importância da formação de professores, os contributos que aquela forma de trabalho podia dar, nesse domínio; (4) as conexões estabelecidas, em relação a outras turmas, com estagiários, que reforçou a importância da formação de professores; e (5) as conexões entre as análises dos artigos, já escritos, no âmbito do projecto IC e as acções de formação, para enfermeiros, que a Tatiana concebeu e operacionalizou.

O desenvolvimento do sentido crítico, da capacidade de observação e de análise de informação diversificada, ou reflexão sobre as práticas, são aspectos que o projecto IC tentou desenvolver. Muitos deles, começaram logo a ser promovidos desde a primeira semana de aulas, através da resolução das tarefas do IACC e, posteriormente, da sua discussão geral, explorando diferentes tipos de abordagem, raciocínio e estratégias de resolução. Os impactes do desenvolvimento destas capacidades e competências estão bem patentes neste excerto e mostram como, quando são mobilizadas, posteriormente, permitem estabelecer conexões entre diversos contextos, cenários e situações, expandindo o poder destas aprendizagens. O paralelo que a Tatiana estabelece entre as análises feitas nos artigos escritos pela equipa do IC e o que ela decidiu fazer nas acções de formação, que elaborou e colocou em prática, no domínio da Enfermagem, são uma evidência empírica disso mesmo. Quando, em aula, os alunos aprendem a aprender por si mesmos, desenvolvendo novas capacidades e competências, mais tarde, noutras disciplinas, cursos, na vida profissional e, até, pessoal e social, são também capazes de mobilizar essas capacidades e competências e de estabelecer conexões que lhes permitem usá-las, de uma forma flexível e adaptada a outras realidades.

A importância da formação também já tinha sido mencionada pelo V. (César, 2013b), quando justificava porque não pedia para retirar um excerto, em que dizia algo menos conseguido, mas sim para acrescentar outro, em que dissesse algo genial. Como ele justificou, nessa entrevista, se formamos professores, se vamos a conferências e outros eventos da especialidade discutir o trabalho que

realizamos, temos de poder mostrar como os alunos evoluem, como se podem escolher métodos de ensino e de aprendizagem que promovam o acesso ao sucesso académico e escolar. Estes são apenas dois exemplos. Mas, durante o *follow-up*, e mesmo depois deste terminado, foi frequente ouvirmos e lermos menções de que os alunos se apercebiam de que formávamos professores e que achavam importante mais professores conhecerem metodologias que favoreciam os desempenhos dos alunos. Por isso, não são apenas a Tatiana e o V. que o referem. São muitos outros alunos, o que mostra que o sentido apurado de observação, de análise, de reflexão, se desenvolvia através do trabalho dialógico e colaborativo e do paradigma da Matemática crítica (Frankenstein, 1983, 2012; Skovsmose, 2022, 2023). Daí que, um tema que nunca focámos, explicitamente, como a formação de professores, tivesse sido equacionado pelos alunos e tivesse feito parte das suas reflexões, aparecendo em diversas entrevistas e conversas informais. Isso levou a que vários alunos nos dissessem, posteriormente, que também estavam a contribuir para a formação de profissionais nos domínios em que trabalhavam.

Como já afirmámos, o projecto IC também teve impactes nas trajectórias de participação ao longo da vida de alguns observadores externos e avaliadores externos, que passaram de profundamente descrentes no trabalho colaborativo e dialógico, bem como na educação intercultural e inclusiva, para alguém que os promove, em aula. Esta mudança é um processo, nem sempre isento de culpabilização e sofrimento, como esta observadora externa afirma. Perceber que se prejudicaram alunos, por não acreditar que eles tinham capacidades e competências que, provavelmente, existiriam, não é um processo fácil. Mas, como reconhece, mais vale mudar, a partir de agora, as práticas em aula, do que continuar a usar aquelas que já percebeu que não favorecem os desempenhos dos alunos.

> Fiquei suficientemente convencida, para já me ter inscrito nas próximas acções de formação do projecto [IC]. Agora, sou eu que quero aprender a trabalhar assim. Mas, se isto tem aspectos muito positivos, pois vou ter uma equipa com quem trabalhar, vou melhorar as práticas, também tem conotações negativas, de culpabilização, porque me faz compreender que, ao longo da minha carreira, devo ter prejudicado muitos alunos, que mereciam ter sido apoiados, ajudados a

> expressarem as suas potencialidades, que, então, eu não acreditava que existiam. Mas, se estes, a cujas aulas assisti, as tinham, os meus também as deveriam ter. Bem, mais vale tarde que nunca, não é? (Observadora externa, RE, Junho de 2002)

Quando já se tem muitos anos de carreira, com diversos hábitos enraizados, querer mudar as práticas, implica estar disposto a fazer formação contínua, questionar o que até ali se fazia, aprender a utilizar novos instrumentos de avaliação de capacidades e competências, outros processos e instrumentos de avaliação dos conhecimentos matemáticos, apropriados pelos alunos. Por isso, implica esforço, empenho, análise crítica das práticas e estar disposto a mudar alguns hábitos, consolidados ao longo de anos e anos, mas nem sempre muito conscientes, nem muito sustentados em evidências científicas. Não é um processo fácil, nem isento de alguns avanços e recuos, bem como de muitas dúvidas. Daí ser tão importante que haja o apoio de uma equipa, cuidadosamente preparada para fazer formação e, depois disso, supervisão, até aquela pessoa já conseguir continuar, de forma autónoma. Mas, quando, mais tarde, vemos estas pessoas a fazer comunicações em eventos da especialidade, a escrever artigos científicos ou a investir em mestrados e doutoramentos, mostrando como evoluíram as práticas que desenvolvem em aula, percebemos que os impactes do projecto IC foram muito além do que tínhamos previsto, quando o concebemos.

Como o desenvolvimento de capacidades e competências, tanto cognitivas como sociais e emocionais, não é estanque, os alunos que participaram no projecto IC, não só progrediram nos desempenhos matemáticos, como também o fizeram noutras disciplinas. Assim, os impactes desta participação foram muito significativos no que se refere ao sucesso escolar e à trajectória de participação ao longo da vida. Para o Tomás, que desejava seguir um curso de Ciências, as classificações obtidas no 9.º ano de escolaridade deram-lhe mais confiança para se matricular na área da sua preferência no 10.º ano de escolaridade (correspondente ao actual Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias) e para concluir o ensino secundário, com uma média que lhe permitia escolher um curso do seu agrado. A média não era suficiente para entrar em Medicina, algo que ele tinha equacionado, mas possibilitava que entrasse em Medicina Dentária, o que

ele percebeu que preferia, revelando como tinha desenvolvido o sentido crítico, a capacidade de análise de pessoas e situações, bem como o conhecimento de si próprio. Como nos revelou, na entrevista do *follow-up*, "gosto de um curso que envolva Ciências e tratar pessoas, mas prefiro não ser frequentemente confrontado com a morte e com doenças muito graves e ser dentista tem isso" (Tomás, E9, Julho 2005). Para além disso, esta saída profissional também tinha outras características que lhe agradavam mais do que Medicina, como nos explicou.

> Medicina Dentária não tem urgências, como nos hospitais, com turnos de 24h, que me façam ter de trabalhar noites, fins-de-semana, feriados e dias de festa, como o Natal... Posso ter um horário diurno, que consiga mais facilmente conjugar com a família porque, mais tarde, gostava de ter filhos e de ter tempo para eles. Não quero ser daqueles pais que nunca têm tempo para estar com os filhos, que estão sempre a trabalhar quando eles estão acordados, ou nos dias em que não têm escola. O que gostava de ter é um estilo de vida mais compatível com ser dentista, porque posso ter um consultório meu, fazer os meus próprios horários... (Tomás, E9, Junho 2005).

O que nos confidencia, nesta entrevista de *follow-up*, revela maturidade, pois procurou ver o estilo de vida profissional associado a cada um dos cursos que eram do seu agrado. Não queria escolher apenas pelo prestígio social, que era maior em relação a Medicina do que a Medicina Dentária, mas pelo que gostaria que fosse a sua vida, pessoal e profissional, no futuro. As características que identifica na Medicina, e que a distinguem da Medicina Dentária, mostram que fez uma reflexão cuidada, que percebeu muito do que as diferencia. Para a vida familiar que gostaria de ter, conjugando-a com a vida profissional, ter um consultório próprio e um horário diurno, parece-lhe corresponder mais aos seus desejos. Portanto, além de capacidade de pesquisa, sobre as condições de trabalho, de capacidade de observação e análise, também revela um trabalho de conhecimento de si próprio, do que ambiciona para o futuro, que já evidencia muita maturidade emocional, para alguém da sua idade. Como nos confidenciou posteriormente, ver a Tatiana escolher cuidadosamente o curso a que iria concorrer, fê-lo perceber que, também ele, deveria fazer algo semelhante. Por isso, ter

trabalhado com ela, em díade, tornando-se seu amigo, também lhe trouxe vantagens no que se refere à escolha do curso do ensino superior e da profissão que desejava.

A família do Tomás estava de acordo com esta opção. Portanto, a escolha do curso e, posteriormente, do caminho profissional, foi algo que não criou conflitos entre as *I-* e *Me-positions* que caracterizavam o seu *dialogical self* (Hermans, 1991, 1996, 2001, 2003). Hermans (2002) refere que é mais frequente não existirem grandes conflitos quando a pessoa participa na cultura dominante, como acontecia com o Tomás, porque as suas expectativas e formas de actuação são mais semelhantes às de quem tem poder e é mais valorizado socialmente. No entanto, apesar disto ser assim, muitas pessoas que não apresentam grandes conflitos entre as diferentes *I-positions*, também não fazem a reflexão subjacente ao que nos diz neste excerto, nem revelam esta maturidade cognitiva, social e emocional. Nesse aspecto, ter participado no projecto IC, desenvolvendo trabalho dialógico e colaborativo, bem como ter frequentado uma escola onde se utilizava mediação cultural bi-unívoca, promovendo o diálogo intercultural, fizeram o Tomás contactar com pessoas de culturas diversificadas, com trajectórias de participação ao longo da vida muito diferentes, o que contribuiu para o seu desenvolvimento cognitivo, social e emocional, permitindo-lhe construir ferramentas internas muito úteis para um melhor conhecimento de si próprio e do que o rodeia.

Para a Tatiana, cuja cultura onde participava não valorizava muito a Escola, os conflitos entre as diversas posições identitárias (*I-positions*) foram acentuados e causaram-lhe, por vezes, sofrimento e hesitações quanto à trajectória de participação ao longo da vida que deveria traçar. As classificações que começou a ter em Matemática e, depois, noutras disciplinas, foram um gatilho para a fazerem repensar o que queria fazer. Começou a equacionar matricular-se no ensino secundário e, até, tirar um curso superior, que lhe permitisse ter uma vida melhor, com um salário mais alto, uma casa com mais condições, o que ela designava como "uma vida menos sofrida" (Tatiana, E5, Dezembro 2001). Mas se, na escola, ela sentia que era mais apreciada e que estes novos planos eram valorizados, em casa e no bairro, nomeadamente entre os amigos e familiares, sentia o oposto, tal como acontecera com o V. e tantos outros alunos do bairro. Por isso, os conflitos entre as diferentes *I-positions* (filha, amiga, sobrinha, vizinha, aluna, colega

de turma e de escola) eram fortes e ela expressou, por diversas vezes, a incerteza quanto ao rumo a tomar.

Desejava um futuro melhor, do ponto de vista profissional e económico, mas também não queria desapontar os pais, nem deixar de ajudar os irmãos. Na cultura cabo-verdiana, o sentido de família e de entreajuda é algo muito forte, o que acentuava os conflitos internos e externos. Equacionava estudar na universidade, mas gostaria, mais tarde, de ser mãe e, no bairro, repetiam-lhe que nenhum marido, da cultura dela, ia querer uma mulher com um curso superior. No bairro, o estigma era esse: quem tinha um curso superior, deixava de fazer parte da maneira como eles viviam, dos valores que defendiam. Por isso, as classificações elevadas, a ela, trouxeram-lhe satisfação, mas também sofrimento, algo que César já descrevera em relação a outros casos, como o do V., que acima analisámos (César, 2009, 2013a, 2013b, 2024a, 2024b). A mãe manifestava desagrado por ela querer continuar a estudar. Achava que isso a afastaria do que era importante: constituir família cedo, ter filhos, ocupar-se dos irmãos. Por isso, quando a Tatiana terminou o 9.º ano de escolaridade, teve de negociar com a família: ia para o ensino secundário, mas trabalhava antes de ir para a escola (limpava escritórios, de madrugada), nas tardes livres e aos sábados. Assim, ela fez o ensino secundário, mas tinha um horário muito cansativo, o que a levou a questionar-se, mais de uma vez, sobre se valia a pena fazer aquele esforço todo.

Se compararmos estas duas trajectórias de participação ao longo da vida, a do Tomás é consideravelmente mais simples, social e emocionalmente, em termos de expectativas futuras. Tinha uma casa confortável, uma família e amigos que apoiavam os seus desejos de tirar um curso superior. Quando o concluiu e fez o estágio profissional, facilmente conseguiu emprego e, passados poucos anos, abriu o seu próprio consultório, com a ajuda financeira dos pais. Portanto, para ele, ter conseguido classificações mais elevadas foi algo que lhe trouxe satisfação, realização profissional e pessoal. Para a Tatiana, ter-se inscrito no ensino secundário não agradou à família e que, depois, decidisse tirar um curso superior, ainda lhes desagradou mais. Por isso, ela teve de trabalhar muito, juntar dinheiro durante um ano após concluir o ensino secundário e, só depois, se pode inscrever no ensino superior.

> Eu sei que só posso contar comigo. Mas não quero falhar aos meus irmãos mais novos. Eles vão ter o meu apoio, se quiserem continuar a estudar. Foi por isso que eu trabalhei tanto durante o ensino secundário e entreguei quase todo o dinheiro que ganhava em casa. Nisso, eles têm mais sorte do que eu, que sou a mais velha e fui mais sacrificada. Eu tive de trabalhar muito, em casa e a tomar conta deles. Às vezes, parecia mais ser mãe deles, do que irmã. Por isso, eu sei o que é tratar de filhos pequenos e quero ter os meus noutras condições.... para eles poderem ser crianças, percebe?
>
> Dantes, eu não pensava nisso. A minha vida era como a dos outros, à minha volta. Por isso, eu achava que todos viviam assim. Mas agora, com mais capacidade de análise, mais sentido crítico, a conhecer mais pessoas, de meios diferentes, eu percebo que não. (Tatiana, E9, Junho de 2005)

Assim, apesar de ter média para ter bolsa de estudo no ensino superior e de existirem residências de estudantes, que até tinham preços especiais para estudantes economicamente carenciados, como ela não queria deixar de entregar dinheiro em casa, aos pais, para ajudar na educação dos irmãos mais novos, precisou de ficar um ano sem estudar. Foi uma opção dura, para ela, tanto mais que sabia não ter o apoio familiar em relação a inscrever-se e concluir um curso no ensino superior. Mas revelou muita maturidade emocional, tal como a análise que faz e em que reconhece que quer ter filhos, mas com outras condições, para eles conseguirem ser crianças, sem terem responsabilidades de adulto, como aconteceu com ela. Quando começou a conhecer outras realidades, percebeu que ela tinha sido, por vezes, mais mãe do que irmã dos irmãos e pretende que os filhos dela não assumam esses encargos, que possam ter uma vida mais leve, mais tempo para brincarem e serem só crianças.

É muito interessante que reconhece que, enquanto vivia centrada no bairro, enquanto a socialização alargada só passava por ali, ela considerava que tratar da casa e dos irmãos era o habitual em todas as famílias. Foi quando se tornou amiga de alguns colegas de famílias mais abastadas, com planos de futuro que incluíam cursos no ensino superior, que ela começou a fazer uma reflexão mais profunda sobre o que era a vida dela e o queria que fosse, no futuro. Percebeu que gostaria de viver com mais condições, para também possibilitar uma vida diferente aos filhos. Para além disso, tornou-se claro que, quanto ao prosseguimento de

estudos, só poderia contar consigo própria, o que a fez ser mais previdente, pensando e organizando muito bem esse passo, que decidira dar.

> Se eu falhar e desistir do curso [ensino superior], se não tiver dinheiro que chegue para pagar tudo e me vier embora [da universidade], eles até cantam, dançam e batem palmas. Fazem uma festa, para comemorar. Por isso, só tenho uma solução: trabalhar muito, durante um ano, juntar dinheiro, para poder alugar um quarto e sair dali, quando for para a universidade. Preciso de outro ambiente, para conseguir estudar. Preciso de estar perto da faculdade, para gastar menos em transportes e não perder muito tempo, porque vou continuar a trabalhar, para poder sobreviver. A bolsa não chega para tudo. Já me informei e sei quanto vou receber, que não pago propinas, mas pago o quarto na residência, com um preço reduzido.
>
> E tenho de ter dinheiro para uma aflição, por exemplo, se ficar doente e tiver de comprar medicamentos. Tenho de conseguir pagar a minha vida, comer, os transportes, as contas. Tenho de gerir tudo muito bem, porque a minha família não é como a do Tomás, a da Ana ou do João [colegas de turma do ensino secundário], que apoiam as escolhas deles e querem que eles tirem um curso superior. (Tatiana, E9, Junho 2005)

A Tatiana, habituada a desempenhar papéis diferenciados, incluindo gerir as finanças domésticas em casa, pois era ela que ía às compras, tratava da casa, dos irmãos e fazia o jantar, sabia que a vida não era fácil. Por isso, antes de se inscrever no ensino superior, informou-se bem do que receberia, com a bolsa de estudo, das condições, na residência universitária e de todas as despesas que isso implicaria. Fez contas, tomou decisões (por exemplo, não deixar de contribuir para os estudos dos irmãos mais novos) e resolveu que ía ficar um ano só a trabalhar. Como já era maior, abriu uma conta num banco e passou a depositar lá uma parte do que ganhava, "única forma de poupar algum... se for para casa com ele, desaparece todo..." (Tatiana, E9, Junho 2005), como nos confidenciou na mesma entrevista. Assim, foi ajudando em casa, mas também juntou dinheiro para, no ano seguinte, se conseguir inscrever no ensino superior e "pagar as contas", como refere. Isso mostra muita maturidade financeira, muito sentido de

responsabilidade, em relação ao que serão as novas obrigações, numa altura de maior autonomia, em relação à família e ao bairro.

Ela sabia que a família preferia que desistisse de tirar um curso do ensino superior, pois não viam qualquer utilidade nisso e achavam que só traria problemas, como ficar solteira e sem filhos. Na cultura dela, os maridos não queriam mulheres com estudos longos. Fazia-os sentirem-se inferiores e desfasados. Por isso, tornou-se muito prudente e cuidadosa: decidiu ter algum dinheiro para imprevistos; e ser muito contida nas despesas, enquanto juntava dinheiro para ir para o ensino superior. Percebemos, pelo que nos contava em algumas conversas informais que, se ía ao cinema ou comer um gelado, era porque alguns amigos, com mais possibilidades financeiras do que ela, a convidavam e lá acabavam por a convencer a ir com eles. Por isso, a trajectória de participação ao longo da vida da Tatiana, tal como a do V., e de tantos outros do mesmo meio cultural e sócio-económico, nesta e noutras escolas, foi muito mais dura e implicou muito mais sacrifícios, para que conseguissem frequentar o ensino superior. Foi, ainda, fonte de muitos conflitos entre as várias *I-positions* (filha, amiga, vizinha, aluna), pois os diversos contextos em que ela vivia, como a Escola e a Família, tinham valores e expectativas muito diferentes, nomeadamente em relação ao papel da mulher, na vida familiar, social e profissional.

Para além disso, nunca sentiu que as opções dela fossem apreciadas no bairro, nomeadamente pela família, e isso custava-lhe bastante, como descrevem César (2017) e César e Machado (2024b). Tinha consciência de que ser mulher, negra e viver no bairro lhe dificultava as escolhas e que precisava de pensar muito bem no curso que ia frequentar. Como não aceitava ganhar menos por ser mulher, uma discriminação de género frequente em Portugal (Carmo et al., 2024), no 12.º ano de escolaridade selecionou profissões que não discriminassem homens e mulheres, em termos salariais. Acabou por escolher Enfermagem, pois os hospitais públicos tinham tabelas salariais fixas, sem discriminação de género, e havia falta de enfermeiros. Sendo uma profissão onde existem mais mulheres que homens, nos cargos de chefia também havia bastantes mulheres. Isso pareceu-lhe corresponder ao que desejava, quanto à não discriminação de género. Para além disso, na faculdade onde poderia estudar para ser professora de Biologia, outra hipótese que considerou, não existia horário pós-laboral e ela precisava de continuar a

trabalhar. Medicina, a outra escolha que lhe agradava, tinha médias muito altas, estudos muito longos, era um curso caro e, por isso, não lhe pareceu adequado. Assim, dos três cursos de que gostava mais e que tinha equacionado, no 12.º ano de escolaridade como possibilidade, acabou por preferir Enfermagem.

Durante o 3.º ciclo do ensino básico, enquanto participou no projecto IC e contactou com alguns mecanismos de *inter-empowerment*, vivenciou situações que lhe permitiram internalizá-los, transformando-os em mecanismos de *intra-empowerment*, que ela conseguia usar noutros contextos, cenários e situações. A auto-estima positiva, que estava mais elevada, bem como a resiliência, que tinha desenvolvido, ajudaram-na a ser capaz de ultrapassar os vários obstáculos com que se foi deparando e a procurar soluções viáveis. Tratou dos papéis para ter bolsa de estudo, foi viver para a residência universitária durante a licenciatura e, esse afastamento do bairro, permitiu-lhe atenuar alguns conflitos, ou melhor, não os vivenciar quotidianamente de forma tão nítida. Continuava a trabalhar e a enviar dinheiro para casa, mas impôs uma condição: se queriam o dinheiro dela, os irmãos íam, pelo menos, terminar o ensino secundário. Se assim não fosse, ela deixava de contribuir financeiramente para a educação deles. Esta autonomia e assertividade não agradava aos pais. Mas ela queria que os irmãos estudassem, para terem mais possibilidades de escolha na vida, pessoal e profissional. Como a família precisava da ajuda financeira dela, acabaram por ceder e, hoje, ela orgulha-se de quase todos os irmãos terem um curso profissional ou superior. Apenas dois dos rapazes optaram por começar a trabalhar na construção civil, a seguir ao 12.º ano de escolaridade. Como nos disse: "ganham bem, não têm falta de trabalho, mesmo com a pandemia, mas têm uma vida muito dura" (Tatiana, CI, registada pela investigadora, Outubro 2020).

Durante o curso superior, como relatou em entrevistas e conversas informais, não sentiu discriminação racial, nem de género. As alunas eram maioritárias, em Enfermagem. Por isso, ela já calculava que não existiria discriminação de género até porque, sendo uma questão sensível para ela, teve-a em consideração na escolha do curso e tinha falado com enfermeiras, informando-se das condições no ensino superior e, posteriormente, nos hospitais públicos, onde pretendia vir a trabalhar. Quanto à discriminação racial, não a sentiu directamente, no modo como foi tratada. Apesar de apenas existir mais uma colega cuja família

era oriunda de Cabo Verde, como a dela, afirmou que foram bem recebidas. Mas apercebeu-se de algo que era uma marca de discriminação racial no país e que a chocou: não teve um único professor que não fosse caucasiano, nem viu nenhuma funcionária dos serviços administrativos que não o fosse. Porém, se chegasse cedo e se cruzasse com as empregadas de limpeza, a maioria era de origem africana. Isso fê-la aperceber-se de que, durante a infância, adolescência e enquanto jovem adulta, não conhecera pessoas de origem africana, em Portugal, em posições de relevo, que pudessem servir como modelo e inspiração para quem estava a decidir o rumo da sua vida, enquanto estudava.

> Perceber, durante o curso de Enfermagem, que não havia nenhum professor, empregada dos serviços administrativos, ou mesmo segurança, que fosse negro, fez-me fazer uma reflexão sobre o que se esperava de nós, na sociedade, em Portugal. Ali, só as empregadas de limpeza eram, quase todas, de origem cabo-verdiana. Eram as profissões mais mal pagas, desprestigiadas, precárias, com horários mais complicados, que elas tinham. Para mim, isso foi um choque. Foi como se a sociedade portuguesa nos dissesse: 'podem ficar cá, desde que só desempenhem as profissões sem prestígio, que nós não queremos para nós, nem para os nossos filhos'.
>
> Mas resolvi saber mais e perguntei, aos colegas que estavam noutros cursos e noutras escolas de ensino superior, se a realidade, nesses locais, também era semelhante. E sabe o pior? Era assim, em todas elas. Todas, absolutamente todas: nem um professor que não fosse caucasiano, poucos ou nenhuns colegas de origem africana. Era como se, por lei, pudessem continuar a estudar, mas, na prática, isso nunca ou quase nunca acontecesse. E quando me lembro do que eu tive de lutar para continuar a estudar, percebe-se porquê. (Tatiana, E13, Julho 2009)

Quando a Tatiana fez esta reflexão, estava no 3.º ano da licenciatura. Mas contou-nos que, desde o final do 1.º ano, que esta questão a andava a incomodar, pois percebia que, sem modelos que as pudessem inspirar a terem esperança num futuro melhor, as meninas de origem cabo-verdiana tenderiam a reproduzir os modelos que conheciam e continuariam a ter projectos de vida que passavam por abandonar a escola na adolescência, começar a trabalhar em profissões precárias

e terem filhos muito cedo, sendo muitas vezes abandonadas pelos pais dos filhos, quando estes ainda eram pequenos. Daí que a Tatiana também nos dissesse que tinha percebido que, nas escolas, era importante fazer sessões com pessoas daquela cultura e que tivessem outro tipo de profissões, para as crianças e adolescentes perceberem que isso também era possível. Que era preciso resiliência, lutar muito, resistir a alguma discriminação racial e de género, mas era possível.

Como salientou, mesmo agora, que estava a um ano de concluir a licenciatura, que frequentava o ensino superior há três anos, ela continuava a não conhecer médicos, advogados, engenheiros, políticos, gestores de prestígio, que trabalhassem em Portugal e fossem de origem cabo-verdiana. Por isso, disse-nos que, quando tivesse a vida profissional mais estabilizada, gostaria de participar em sessões dessas, nas escolas, com outros profissionais como ela, que tinham vivido condições adversas, mas que tinham feito uma escolaridade mais longa do que o esperado, nas suas famílias. Pessoas que tinham construído uma carreira que lhes agradava. Queria poder mostrar modelos que trouxessem esperança às meninas, cujas famílias participavam na cultura cabo-verdiana.

> Nessa altura, percebi como a minha decisão de tirar um curso superior podia vir a ajudar outras meninas como eu, que em criança e quando jovens, nunca tinham visto uma mulher da nossa cultura que tivesse sucesso, numa profissão socialmente respeitada, com um salário decente, que desse para viver. Muitas de nós nem sequer pensam em estudar, quando terminamos o 9.º ano, porque todas as mulheres que conhecemos, que nos servem de modelo, também não estudaram, são mal pagas e têm profissões daquelas que ninguém quer ter.
> Vai dar trabalho, não vai ser pago, mas se já estivermos numa fase [da vida] mais estabilizada, com um salário razoável, um lugar de quadro ou sem riscos de sermos despedidos, podíamos pensar nisso. Contactei alguns colegas da escola secundária, que também tinham tirado cursos superiores e que encontrei *online* e eles também gostaram da ideia. Agora, é esperarmos pelo momento certo e organizarmo-nos, para que isto possa funcionar. (Tatiana, E13, Julho 2009)

Quando já tinha a posição profissional consolidada no hospital onde trabalhava, a Tatiana voltou-nos a falar desta possibilidade. Sabia que nós

conhecíamos vários alunos como ela, que tinham lutado, concluído cursos no ensino superior, e agora desempenhavam funções que lhes agradavam. Perguntou-nos o que achávamos daquela ideia. No ano seguinte, começaram a fazer sessões de divulgação, em diversas escolas, nas quais o V. e outros colegas também participaram e que foram muito significativas para os alunos. Aperceberam-se da importância destes diálogos no decorrer das sessões, das conversas informais que se lhes seguiram, mas também do *feedback* posterior, que receberam nas redes sociais e outros meios digitais, e que os fez valorizarem ainda mais o trabalho que estavam a desenvolver.

Esta decisão revela capacidade de observação, análise, sentido crítico e uma forte consciência social, características que procurávamos desenvolver no projecto IC e numa educação intercultural e inclusiva. Mostra uma aprofundada compreensão da realidade que vivem as minorias sócio-culturalmente desvalorizadas, sobretudo no que se refere à equidade e justiça social que, tantas vezes, é escassa nas escolas e na sociedade, em geral. Por isso, relaciona-se também com a interculturalidade e inclusão, não só enquanto educação, mas também no que se refere contribuir para uma sociedade inclusiva e intercultutral mais justa, com mais oportunidades para todos, onde as vivências de exclusão deixem de ser tão prementes (César, 2017).

A Tatiana era dois anos mais velha do que a maioria dos colegas, quando se inscreveu no curso de Enfermagem, pois tinha reprovado no 2.º ano de escolaridade e tinha ficado um ano só a trabalhar, após concluir o ensino secundário. Mas sentia-se muito mais velha que os colegas, pois ela trabalhara duramente desde o verão em que tinha 16 anos, quando terminou o 9.º ano de escolaridade, era estudante-trabalhadora e tinha pouco tempo livre para sair à noite e para se divertir. Para ela, a gestão financeira era apertada. Por isso, jantares, ir a um bar ou esplanada ao final do dia, viagens, eram algo que ela não podia pagar. Os professores apreciavam-na porque era muito organizada, estudiosa e responsável, nos estágios tinha muita capacidade para comunicar com os doentes e era competente, mas ela sentia-se deslocada, em relação aos colegas de curso. Os amigos que mantinha eram da escola secundária, não só o Tomás, mas outros colegas que tinham estudado com ela, no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário. Esses eram os que a apoiavam. Também nos escrevia *e-mails* a contar os

progressos, ou quando precisava de se sentir apoiada, algo que era mais frequente entre os alunos cujas famílias não valorizavam estudos longos. Para eles, o *follow-up* foi fundamental, enquanto suporte emocional e possibilidade de falarem com alguém que não os julgava pelas opções escolares e profissionais que faziam, que os animava quando a vida se tornava tão dura, que eles se sentiam desanimados.

Quando terminou o curso e conseguiu logo colocação num hospital público, sentiu que estava a ser recompensada: "Finalmente tenho uma profissão de que gosto mesmo e um salário com que consigo viver. Ainda dou explicações de Matemática, porque quero continuar a ajudar os meus irmãos. Mas já consigo sair com amigos ou estar sentada numa esplanada a aproveitar o sol. É tão bom!!!" (Tatiana, CI, *e-mail*, Outubro 2009). Mas, se arranjar emprego foi fácil, pois naquela época havia falta de enfermeiros nos hospitais públicos e ela tinha uma média elevada, conseguir alugar casa foi mais difícil do que ela tinha imaginado. Era como se cada novo passo, do ponto de vista social, exigisse um esforço enorme. Como se a discriminação racial e de género espreitassem a cada nova tentativa de melhorar a vida.

A Tatiana não tinha sentido discriminação racial, nem de género, no curso do ensino superior. Nisso, tinha tido melhores condições do que o V., que sentiu discriminação racial durante o curso. Aliás, Enfermagem tinha muito mais estudantes femininas, o que facilitava que não existisse discriminação de género e os hospitais têm tabelas salariais fixas, por categoria profissional. Portanto, homens e mulheres, se desempenham as mesmas funções, ganham o mesmo salário. A discriminação de género só se nota quando se analisam alguns cargos de chefia, que são maioritariamente desempenhados por homens, sobretudo na Direcção hospitalar e em alguns cargos médicos. Mas, como a Enfermagem tem muito mais mulheres, não é nesta profissão que isso se nota.

Porém, quando tentou alugar uma casa, a discriminação voltou a fazer-se sentir. No início, ela pensou que tinha respondido tarde demais e alguém já tinha alugado a casa. Contudo, depois de lhe suceder o mesmo três ou quatro vezes, compreendeu que, ao telefone, como não se via quem falava, as casas estavam disponíveis. Mas, quando ela chegava, a discriminação racial (subtil) e de género (mais explícita, pois diziam-lhe que era difícil uma mulher, sozinha, pagar uma

renda) faziam-se sentir e, subitamente, a casa afinal já estava alugada. Com as casas, a Tatiana vivenciou uma discriminação racial semelhante à que o V. relata quando concluiu a licenciatura e os clientes, que o aceitavam bem como empregado que faz recados, não o aceitavam como quem é arquitecto e responsável pelos projectos. É uma forma de discriminação racial subtil, mas terrível, como se só pudessem ter profissões que não sejam muito valorizadas socialmente.

Por isso, apesar de a Tatiana ter um contrato efectivo no hospital e de o salário lhe permitir alugar uma casa, só passados três meses e muita resiliência, pois foi rejeitada muitas vezes, conseguiu alugar um T1, algo que sentiu como uma enorme conquista: gostava da casa, pequenina, mas luminosa, bem localizada, por ser perto do hospital, o que era essencial pois trabalhava por turnos. Mas, sobretudo, como nos disse numa conversa informal, por *e-mail*, estava feliz por ter uma casa de banho e uma cozinha só para ela, por ter o seu próprio espaço, onde podia descansar e estar descontraída. Como afirmou, "agora, sinto que valeu a pena tudo o que tive de lutar para chegar aqui. Quando abro a porta e me sinto em casa, é uma alegria, mesmo que venha cansada" (Tatiana, CI, *e-mail*, Março 2010). Também o V. relatara que, mesmo quando vivia num quarto alugado, as condições eram melhores do que no bairro e que, quando alugou um T0 "senti-me um sortudo, por ter tanto espaço só para mim, onde podia estar relaxado, em paz, fazer o que me apetecia... nem que fosse só dormir, porque andava tão cansado, que às vezes era isso que fazia" (V., E11, Julho 2007). Por isso, algo como alugar uma casa que, para os que participavam na cultura dominante, parecia depender apenas da disponibilidade financeira e da vontade, para quem participava em culturas minoritárias, sócio-culturalmente desvalorizadas, era algo bem mais complexo, que exigia esforço, resiliência, capacidade de persuasão e, às vezes, parecia impossível.

O Tomás reconhecia o esforço dela e tê-la como amiga fê-lo perspectivar a vida de outra forma. Numa das entrevistas do *follow-up*, afirmou: "quando a vida é mais dura e me sinto desanimar, penso na Tatiana e no que ela teve de lutar, no que sofreu... percebo a sorte que tive em ter a minha família, uma casa... Isso faz-me valorizar mais tudo." (Tomás, E13, Julho 2009). Mas também revela a admiração que tem por ela: "Se eu tivesse de passar por tudo o que ela passou, acho que tinha desistido. Mas ela não, tem garra, vai à luta, não desiste. É das

pessoas que mais admiro. É um orgulho ver o que ela conseguiu." (Tomás, E15, Julho 2011). A Tatiana, agora já com mais leveza, vai dizendo: "a discriminação continua. Todos os meses oiço comentários racistas e sofro discriminação de género, sobretudo na rua e nas lojas. Ser negra e mulher, é dose. Mas estou feliz: gosto da minha vida, do que consegui e vou andando" (Tatiana, E16, Julho 2012).

Apesar desta maior leveza, quando a vida lhe permitiu pensar em namorar, a discriminação racial voltou a fazer-se sentir. Como amiga, sentia-se aceite, mesmo quando os amigos eram caucasianos. Porém, quando passava a ser namorada, passava a haver rejeição, onde já tinha existido aceitação. Na família dela, também não aceitavam namorados caucasianos. A mãe costumava dizer que era "negro com negro, branco com branco, pobre com pobre, rico com rico. As misturas só dão confusão e sofrimento" (Tatiana, E15, Julho 2011). Como ela explicou, no bairro teve uns namorados, mas participavam na cultura cabo-verdiana e não aceitavam que ela quisesse estudar. A mãe até teve esperança de que ela engravidasse e deixasse a ideia louca de tirar um curso. Mas, depois, quando foi estudar e trabalhar no hospital, começou a ter cada vez mais amigos e conhecidos caucasianos. Foi aí que se apercebeu da discriminação racial, quando se tratava de namoros, casamentos e filhos.

Uma discriminação que ela sentiu, mas que também é descrita por amigas dela ou por rapazes do bairro, que namoram com caucasianas. Por isso, como salienta, há uma enorme diferença entre os discursos, de igualdade, contra o racismo, e a realidade, espelhada pelos comentários desagradáveis que ouvem na rua, ou pela discriminação de que são alvo nas lojas, algo que o V. já relatara e que analisámos anteriormente (César, 2009, 2013a, 2013b).

> As famílias recebiam-me bem quando me encontrava com eles como amiga, mas isso mudava quando me tornava namorada. A primeira vez, nem percebi. Mas depois de ter vivido isso três vezes, fez-se um clic: nada de *black* como mulher do meu filho, nem mãe dos meus netos. É duro, mas é verdade. As pessoas não são racistas com os amigos. Mas quando se trata de casamento, é outra história. As raparigas do bairro, que tiraram cursos [no ensino superior], contam o mesmo que eu. Todas passámos por isto, quando arranjámos namorados de outra cultura. E o que ouvimos na rua, até tenho vergonha de lhe contar, mas acho que

> consegue imaginar... mas que os rapazes do bairro que saíram, ganharam bem a vida e agora namoram com *non-black* também descrevem. É um mundo estranho, este em que vivemos: aparentemente muito *cool*, muitos discursos contra o racismo, mas depois, a realidade, é bem diferente... (Tatiana, E17, Julho 2013)

Esta descoberta, numa altura em que já tinha estabilidade financeira e a sua própria casa, foi chocante. No hospital tinha progredido na carreira, sem sentir discriminação racial ou de género. Mas, quando decidiu comprar uma casa, mais uma vez foi confrontada com discriminação, quer racial, quer de género. Como ela diz, foram ambas subtis. Nenhuma instituição bancária admite frontalmente que faz discriminação quanto aos empréstimos. Mas ela, que tinha um contrato efectivo, um salário que lhe permitia ter o empréstimo, uma entrada monetária para dar para comprar a casa, teve muito mais obstáculos do que outros amigos e conhecidos, que não eram negros, nem mulheres, que queriam comprar uma casa a solo. Por isso, quando finalmente conseguiu um empréstimo, em 2013 e comprou um T2, perto do hospital, sentiu que era mais uma vitória. Tinha 27 anos e muito do que outros jovens desejam: uma carreira de que gostava (tinha feito uma especialização em neurocirurgia e fora promovida), estabilidade financeira, uma casa, carta de condução e um automóvel, "pequenino, mas de que eu gosto e que me dá autonomia" (Tatiana, CI, *e-mail*, Julho 2013). Porém, sentia que tinha de lutar por cada coisa que pretendia e que era mais difícil para ela do que para quem era caucasiano e/ou homem. Por isso, quando fez uma especialização em Londres, apesar de ter tido um convite para lá ficar e gostar muito das condições de trabalho, não lhe apeteceu começar do zero, num sítio onde não tinha amigos, nem casa e resolveu regressar. A equipa, no hospital, em Lisboa, estava contente por voltar a trabalhar com ela, e ela de reencontrar as pessoas que lá conhecia, de estar com os amigos nos tempos livres, e de viver novamente na sua casa, onde se sentia bem.

Para além disso, um colega, médico, de quem ela gostava percebeu, durante os seis meses em que ela esteve em Londres, que não a queria perder. Começaram a namorar quando ela regressou e, apesar das famílias não aceitarem bem a

relação, resolveram que eram eles quem tinha de decidir com quem casavam e tinham filhos.

> A distância fez-nos bem. Clarificou os sentimentos e ajudou-nos a tomar decisões. Vivemos juntos um ano, estou grávida e estamos contentes. O casamento será mais tarde. Talvez quando as crianças já poderem participar. Acabámos de comprar uma casa maior. Queremos três filhos [Ri-se]. [...] As relações com as famílias ainda são complicadas. Cada família preferia um casamento na mesma cultura. [...] É mais simples para mim, que já estava habituada a ter de ultrapassar este tipo de dificuldades. Lutei toda a minha vida. Ele é como o Tomás. Ele era tudo o que a família queria. Mas agora, comigo e com os filhos que são fruto da mestiçagem... ele vai ter de aprender... (Tatiana, CI, *e-mail*, Abril 2015).

A Tatiana, que tinha lutado para escolher a sua trajectória de participação ao longo da vida, encarou as adversidades das famílias não aceitarem bem aquela relação como mais uma barreira, mais uma vez em que teria de lutar pelo que queria. Mas a vida tinha-lhe ensinado que valia a pena lutar. Como ela compreendeu, foi mais difícil para o companheiro dela, que não estava habituado a barreiras raciais. O nascimento dos filhos facilitou alguns aspectos e dificultou outros. A família dele, depois do nascimento do segundo filho, percebeu que aquela era uma relação que ia durar e resolveram aproximar-se. Os pais e tios dela, continuaram distantes, como já tinham estado nos últimos anos, mas a relação com os irmãos e sobrinhos é próxima e vê-los bem, com uma vida estável, fá-la sentir-se feliz e orgulhosa da ajuda que lhes deu. Porém, o que mais lhe custa, é ver que, por vezes, os filhos também são alvo de discriminação racial, tanto no colégio, como na rua. Mesmo sabendo que eles têm pais que os vão apoiar nas escolhas que fizerem, o que não sucedeu com ela, gostava que eles não tivessem de passar por isso. Mas, em diversos contextos, na rua, nos jardins, nas lojas, até na creche e no colégio, episódios desses sucedem e ela tem de os preparar para os saberem enfrentar e para "sobreviverem felizes e sem muitos danos" (Tatiana, CI, *e-mail*, Março 2024).

Quando houve a pandemia, os sogros tiveram um papel essencial. Ela e o marido, ambos a trabalhar num hospital, fizeram muitas horas extra e foram os avós paternos que ficaram com os netos, que já eram três. Sobretudo durante 2020, em que havia mais incertezas, houve alturas em que isso aconteceu para não arriscarem contagiar os filhos. Isso aproximou-os mais e, agora, a Tatiana sente-se aceite. Em Março de 2024 foi o casamento, com a bênção dos sogros, a participação dos filhos, como eles desejavam, com muitos irmãos, sobrinhos e até os pais e tios dela, que embora reticentes, aceitaram estar presentes. Como ela afirma, "os mais entusiasmados eram os nossos filhos, que adoraram participar nos preparativos todos" (Tatiana, CI, *e-mail*, Abril 2024). Ela disse que tinha sido uma celebração bonita, simples, como eles tinham desejado, mas com muita alegria, música, dança e as famílias reunidas, "algo que antes da pandemia me parecia uma miragem", como contou no mesmo *e-mail*.

Assim, a pandemia foi outro ponto de viragem na trajectória de participação ao longo da vida dela, tanto no contexto familiar, como no social e profissional. Nessa altura, ela descreve que se preocupou com as pessoas que perdiam os empregos, que ficavam em situações muito precárias, pois conhecia bem as dificuldades da vida. Por isso, no grupo de *WhatsApp* que mantinha com os colegas da turma que participou no projecto IC, tentaram saber quem estava em situações mais precárias, profissionalmente, e quem poderia ajudar a encontrar empregos temporários, ou outras soluções (ex: fazer comida para entregar; fazer roupa; ir levar compras a casa). Ela e o Tomás foram dos que mais dinamizaram essa entreajuda. Como ele afirma:

> Foi uma altura muito desafiante. Como dentista, as pessoas tinham de estar de boca aberta e sem máscara. Não posso negar que tive medo, mesmo estando eu a usar máscara. Também me preocupava com a Tatiana e o marido, a trabalharem num hospital, que recebia muitos casos [de Covid]. Mas a Tatiana, muito solidária e atenta aos outros, falou-me dos que estavam sem emprego e, através das redes, fomos vendo como dar ideias, ajudar... Em vez de nos vitimizarmos, vimos que ainda éramos unidos e que, com vontade, conseguíamos arranjar soluções. Podiam ser provisórias, mas davam para eles viverem, até percebermos quando tudo voltava a estabilizar... (Tomás, CI, *e-mail*, Dezembro 2021)

Nessa altura, recebemos vários *e-mails*, desta e de outras turmas, e foi interessante percebermos como pessoas, que tinham deixado de ser colegas há tantos anos, mantinham laços de amizade e se ajudavam numa situação tão imprevisível e inesperada. Como explica o Tomás, "Aqueles três anos foram transformadores. Fizemos amizades para a vida, ainda hoje almoçamos juntos, na pandemia criámos maneiras de ajudar quem tinha perdido o emprego... uma ideia da Tatiana. Foi mesmo importante estarmos naquele projecto." (Tomás, CI, *e-mail*, Dezembro 2022).

Considerações Finais

Como ilustram os resultados apresentados, para promover o *empowerment*, uma educação intercultural e inclusiva, bem como a equidade no acesso ao sucesso escolar e, no futuro, ao sucesso profissional, é necessário conjugar diversos aspectos, tanto nas aulas, como fora delas. As escolas em que os resultados foram mais nítidos conjugavam práticas, em aula, baseadas no trabalho colaborativo e dialógico, com a mediação cultural bi-unívoca (César, 2017, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b, 2025). Assim, existia uma coerência entre o contrato didáctico (César, 2009; Schubauer-Leoni, 1986), negociado entre o professor/investigador e os alunos de cada turma, e o meta-contrato institucional, que regia o funcionamento e influenciava a cultura de escola.

Para o trabalho colaborativo e dialógico ter a adesão dos alunos, foi fundamental alterar a primeira semana de aulas, recorrendo a mecanismos de *inter-empowerment* e a mensagens implícitas empoderadoras, que contribuíram para distribuir o poder. Também foi essencial conhecer muito bem as capacidades e competências que os alunos já mobilizavam, avaliadas, principalmente, através de um instrumento desenvolvimentista, o IACC (Machado, 2014), elaborado pela equipa do projecto IC, em colaboração com diversos professores de Matemática (Ventura, 2012). Ter acesso às capacidades e competências dos alunos, desde a primeira semana de aulas, permitiu, durante a meta-análise da totalidade do *corpus* empírico do IC, cunhar o conceito de modeladores pessoais de desempenho (MPD) (César, 2024b), acedendo a uma compreensão mais aprofundada das potencialidades de cada turma e de cada aluno, como ilustrámos através das Figuras 2, 64 e 65. Neste conceito inovador, concebemos as capacidades e competências em termos de desenvolvimento real (Vygotsky, 1934/1962), ou seja, as que os alunos já conseguem mobilizar de forma autónoma, quando resolvem as tarefas do IACC. Considerámos também o desenvolvimento potencial (Vygotsky, 1934/1962), que corresponde àquelas que os alunos mobilizam com a colaboração de um par mais competente, quando trabalham na sua ZDP. Daí a relevância da natureza das tarefas propostas e dos critérios de formação das díades, que são

da responsabilidade do professor/investigador. Estes critérios devem permitir a alternância do par mais competente, em cada díade, em momentos diferentes da resolução de uma determinada tarefa (César, 2009, 2013a, 2013b, 2017, 2024b; César et al., 2014; César & Machado, 2024a, 2024b).

Sintetizando o que é importante para promover o *empowerment* dos alunos, bem como o seu acesso ao sucesso escolar, promovendo uma educação intercultural e inclusiva, existem vários pontos a ter em consideração, no que se refere ao trabalho desenvolvido em aula: (1) respeitar e celebrar as diversas culturas (ex: através das práticas e manuais escolares); (2) fomentar e valorizar as diversas interpretações, abordagens dos problemas, tipos de raciocínio matemático e estratégias de resolução, incentivando que os alunos partam das suas formas preferenciais de fazer e aprender Matemática, nomeadamente em turmas onde existem diferentes L1; (3) proporcionar aprendizagens ricas e diversificadas, através de tarefas de diferentes naturezas, que permitam que os alunos alternem o papel de par mais competente e trabalhem na sua ZDP; (4) conceber formas de avaliação coerentes com as práticas e adaptadas à diversidade cultural; (5) recorrer a mecanismos de *inter-empowerment*, associados a mensagens implícitas empoderadoras, facilitando a sua internalização e transformação em mecanismos de *intra-empowerment*, que possam ser usados, de forma autónoma, noutros contextos, cenários e situações; (6) organizar as práticas, incluindo as formas de avaliação, de modo a estimular que os alunos estudem os conteúdos abordados em cada semana, nomeadamente através do recurso a mini-testes e a trabalhos de casa semanais; (7) utilizar as discussões gerais, em grande grupo (turma), como forma de aprendizagem de abordagens, raciocínios e estratégias de resolução alternativos, promovendo o desenvolvimento e a aprendizagem, bem como a qualidade relacional dos alunos, ajudando a criar espaços de pensamento e uma comunidade de aprendizagem; e (8) conceber a investigação como intercultural e inclusiva, distribuindo o poder em relação aos diversos participantes, usando a própria investigação como forma de desenvolvimento e aprendizagem, tanto para os investigadores, como para os outros participantes. Nas práticas em aula, são estes os oito principais critérios que promovem uma educação intercultural e inclusiva, a equidade e a justiça social, permitindo operacionalizar o currículo, enquanto veículo para a inclusão e não como um contributo para a exclusão.

Os exemplos analisados mostram como o respeito e a valorização da diversidade são características essenciais dos espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004) e das comunidades de aprendizagem (Civil, 2007). No IC foi particularmente importante mudar a primeira semana de aulas (César, 2009, 2024b; César & Machado, 2025; Machado, 2014; Ventura, 2012), possibilitando um melhor conhecimento dos alunos e que fosse possível adequar as tarefas escolares propostas pelos professores/investigadores às características, interesses e necessidades daquela turma e de cada aluno (César, 2009, 2014, 2017, 2024b; César et al., 2014; César & Machado, 2024a, 2024b). As mensagens implícitas também se revelaram fundamentais para o *empowerment*, a auto-estima positiva e a resiliência, nomeadamente as que foram utilizadas na primeira semana de aulas: todos eram capazes de resolver tarefas matemáticas e de o fazer de uma maneira interessante, que os colegas registavam por escrito, durante a discussão geral. A maioria dos alunos reconheceu a importância desta mensagem implícita, bem como das práticas que lhe estavam associadas, como referem nas entrevistas, conversas informais e questionários, considerando-as um ponto de viragem.

Para os alunos que obtinham níveis negativos de avaliação há muitos anos, que frequentemente já nem tentavam resolver as tarefas matemáticas propostas em aula, constatar que as suas resoluções eram registadas pelos colegas, apreciadas pelo professor/investigador e permitiam que alguns colegas aprendessem através delas, foi uma revelação. Mas, para os que obtinham classificações elevadas, verem toda a turma a participar na discussão geral, com estratégias de resolução bem-sucedidas e, nas primeiras aulas que abordavam os conteúdos programáticos daquele ano de escolaridade, todos os alunos a trabalharem e resolverem as tarefas, também causou espanto e os fez equacionar o que sabiam sobre aqueles colegas. Descobrir que colegas que obtinham níveis negativos conseguiam, por vezes, ser mais rápidos a resolver problemas do que eles, não foi fácil, nem pacífico, em termos de *dialogical self* (César, 2009, 2013a, 2013b; Hermans, 1991, 2001, 2003). Mas foi uma aprendizagem que os fez ganhar maior capacidade de observação, de reflexão, mais sentido crítico e, sobretudo, uma maior maturidade emocional. Afinal, as práticas mostravam que aqueles colegas eram capazes de elaborar resoluções que os alunos com classificações mais elevadas nunca teriam imaginado. Por isso, a primeira semana de aulas ser tão impactante

foi fundamental para criar um espaço de pensamento (Perret-Clermont, 2004) e uma comunidade de aprendizagem (Civil, 2007), características prioritárias numa educação intercultural e inclusiva (César, 2009, 2013a, 2013b, 2014, 2017, 2024b; César et al., 2014; César & Machado, 2024a, 2024b, 2025). Todos estes elementos contribuíram significativamente para promover os desempenhos matemáticos e o sucesso escolar, ajudando também a traçar trajectórias de participação ao longo da vida mais adaptadas a cada aluno, muitas delas com estudos longos.

Os impactes destas práticas, que promoviam o *empowerment*, a distribuição de poder, o envolvimento dos alunos nas tarefas propostas, o trabalho colaborativo e dialógico, em díade ou pequenos grupos, bem como durante a discussão geral, no grupo turma, fizeram-se sentir, primeiro, no *dialogical self* dos alunos (César, 2009, 2013a, 2013b, 2017) e, depois, nas suas trajectórias de participação ao longo da vida (César, 2009, 2024b; César et al., 2014; César & Machado, 2025). Como relatámos, ter acesso ao sucesso académico não é vivido de forma semelhante pelos alunos que participam na cultura dominante, que valoriza a Escola e estudos longos, e por aqueles que participam em culturas socioculturalmente desvalorizadas, que até podem ser maioritárias entre os alunos daquela escola, mas são socialmente minoritárias. Para os que participam em culturas que valorizam a Escola, o acesso ao sucesso académico é vivido como positivo e não cria conflitos entre as diversas *I-positions* (filho, aluno, colega, amigo) e *Me-positions* (como os outros me vêem e como eu acho que eles me vêem), ou seja, para estes alunos o acesso a melhores desempenhos e classificações académicas apenas tem uma valência emocional positiva. Para os alunos que participam em culturas que não valorizam a Escola e estudos longos, o acesso ao sucesso académico tem uma dupla valência emocional: positiva (são mais apreciados na escola, por professores e colegas; sentem-se orgulhosos dos seus desempenhos matemáticos) e negativa (são pouco apreciados, ou mesmo criticados, em casa e no bairro, pelos familiares, amigos e vizinhos). Por isso, para eles, melhores desempenhos e classificações académicas mais elevadas fazem-nos questionar a trajectória de participação ao longo da vida que pensavam traçar, caracterizada por estudos curtos e começar a trabalhar no final do ensino básico (9.º ano de escolaridade). Isso cria-lhes conflitos, internos e externos, no

dialogical self, nomeadamente entre as diversas *I*- e *Me-positions*. Por isso, para estes alunos, os impactes das práticas em aula, no *dialogical self,* são mais fortes e, muitas vezes, associados a algum sofrimento (César, 2009, 2013a, 2013b, 2017, 2024b; César & Machado, 2024a, 2024b).

Os impactes das práticas, promovidas no projecto IC, no *dialogical self* dos alunos são visíveis, de forma mais acentuada e nítida, ao longo do *follow-up*. A dimensão tempo (estudo longitudinal), bem como a dimensão espaço, quando mudam de turma, frequentam o ensino superior, passam também a ter uma vida profissional ou constituem a sua própria família, trazem uma maior capacidade de reflexão, que também é favorecida pelas entrevistas e conversas informais do *follow-up*. Foi, sobretudo, através desses instrumentos de recolha de dados que observámos as maiores alterações no *dialogical self*, quer quando este se desequilibrava, devido aos conflitos que sentiam, quer quando atingia pontos de equilíbrio, em que se sentiam mais realizados e confortáveis. Também nos permitiu apercebermo-nos de como o *dialogical self* se tornava mais resiliente, mais capaz de enfrentar as barreiras com que a vida os confrontava. Como escreveu César (2009, 2013a, 2013b), sem o *follow-up*, teríamos observado os progressos nos desempenhos matemáticos e nas classificações académicas. Podíamos, até, apercebermo-nos dos contributos para a conclusão do ensino básico. Mas, para os alunos em que isso trazia mais conflitos familiares e internos, teríamos tido dúvidas quanto aos benefícios de terem participado no IC. Foi o *follow-up* que nos possibilitou observar como, anos mais tarde, aqueles alunos tinham atingido patamares de realização que nunca tinham imaginado, quando frequentavam a escola secundária e como, com sabedoria e tempo, com um *dialogical self* mais flexível e complexo, eles tinham conseguido atingir um equilíbrio emocional maior, que incluía relações familiares mais equilibradas. Assim, o *follow-up* iluminou as vantagens individuais, sociais, familiares e profissionais de terem participado no IC, algo que eles verbalizam frequentemente, quando nos relatam a evolução da sua trajectória de participação ao longo da vida, que fomos acompanhando (César, 2013a, 2013b, 2017; César et al., 2014; César & Machado, 2025).

Nas escolas, fora da sala de aula, pode sintetizar-se em cinco pontos o que é essencial para que se fomente uma educação intercultural e inclusiva. Alguns destes critérios já tinham sido discutidos por César (2012b, 2013b, 2017) e por

César e seus colaboradores (2014). Enquanto as modificações que decorrem na sala de aula começam, inicialmente, por ser incentivadas pelo professor/investigador, as que se realizam na escola precisam de um grupo de pessoas, geralmente professores e investigadores, que comecem por as fomentar. Estes cinco critérios são: (1) trabalho em equipa, colaborativo e dialógico, distribuindo o poder, tanto por parte dos professores, como de outros agentes educativos (César, 2013b); (2) mediação cultural bi-unívoca (César, 2017), que desenvolva dinâmicas regulatórias de participação entre a escola e as famílias (César, 2013b); (3) formas de organização e gestão escolares adaptadas à educação intercultural e inclusiva, nomeadamente com horários concebidos para os professores terem tempos extralectivos para trabalhar de forma colaborativa e dialógica (César, 2002, 2012b; César & Ainscow, 2006) (4) uma Direcção e grupos disciplinares que fomentem a formação contínua dos professores e outros agentes educativos, incluindo as famílias (César, 2013b; César et al., 2014), nomeadamente a que se pode realizar na própria escola, com formadores que conheçam bem as suas características e que saibam adaptar a formação às necessidades específicas daquela comunidade educativa; e (5) uma reflexão profunda sobre as práticas, dentro e fora da sala de aula, para monitorizar resultados e identificar necessidades futuras. Também Baraldi e seus colaboradores (2019) sublinham que "o trabalho colaborativo, em equipe, é de fundamental importância para construir a escola inclusiva, desejada pela sociedade." (p. 38). Este aspecto foi realçado por diversos autores, como Allan e Slee (2008), Armstrong e seus colaboradores (2000) ou Farrell (2006). Porém, o mais significativo é que nenhum autor considera que se consegue implementar uma educação inclusiva sem trabalho em equipa, sem a colaboração entre diversos especialistas, agentes educativos, alunos e famílias.

As medidas que acima indicámos, no que se refere às práticas, em aula, que constituem uma forma possível de operacionalizar o currículo prescrito, como ilustrámos nos diversos exemplos que analisámos e discutimos, podem ser desenvolvidas sem qualquer alteração por parte do sistema de ensino. O mesmo acontece em relação às medidas a desenvolver na escola, nomeadamente à mediação cultural bi-unínoca (César, 2017; César & Machado, 2025). Isto significa que, mesmo com as inconsistências que existem na actual legislação, ou com a falta de verbas que frequentemente se vivencia, ainda há margens de manobra

que os professores e demais agentes educativos podem utilizar para promoverem uma educação de maior qualidade, mais equitativa e promotora de justiça social. Apesar disso, seria desejável que o sistema de ensino também estivesse concebido para promover uma educação de qualidade, intercultural e inclusiva. Por isso, é importante identificar o que poderia ser melhorado no sistema de ensino.

Ao nível do sistema de ensino, também é preciso que existam melhores condições para que se possa promover uma educação intercultural e inclusiva, que facilite o acesso dos alunos ao sucesso escolar e a traçarem uma trajectória de participação ao longo da vida (César, 2009, 2024b), na escola e fora dela, que os faça sentir realizados. Existem, também nove critérios que nos parecem fundamentais: (1) alocar verbas necessárias à implementação de uma educação intercultural e inclusiva, fazendo uma avaliação rigorosa e detalhada de como estas são gastas e dos impactes que tiveram; (2) as escolas disporem dos especialistas necessários (psicólogos, professores com especialização em diversas condições de AESE, assistentes sociais, médicos, enfermeiros, entre outros, consoante as necessidades de cada escola); (3) formação de professores, inicial e contínua, de maior qualidade, mais prática, e mais adaptada a uma educação intercultural e inclusiva (César, 2024b; César et al., 2014; César & Machado, 2024b, 2025); (4) menor burocratização e mais tempo, por parte dos agentes educativos, principalmente os professores, para a preparação e monitorização das práticas, em aula; (5) valorização da carreira docente, quer em termos salariais e de progressão na carreira, quer sociais; (6) uma avaliação de desempenho, dos diversos agentes educativos, muito mais baseada nas práticas e com critérios claros definidos, que permita diferenciar quem promove uma educação de qualidade de quem não o faz; (7) uma colocação de professores que tenha em consideração as especializações em determinadas condições de AESE (ex: cegos, surdos, espectro do autismo, entre outras); (8) menor frequência de alterações curriculares e/ou legislativas, bem como que estas sejam elaboradas com base numa avaliação prévia, séria e rigorosa, dos impactes das medidas anteriores; e (9) menor quantidade e maior qualidade dos documentos de política educativa e da legislação, incluindo legislação para o ensino superior.

Como realçavam César e Ainscow (2006) e Rodrigues (2003), para implementar uma educação intercultural e inclusiva de qualidade, é necessário que

sejam alocadas verbas. Estas destinam-se a estabelecer protocolos com especialistas, a comprar materiais, a investir em formação contínua para os professores e demais agentes educativos, entre outros aspectos essenciais para implementar este tipo de educação. Porém, também é preciso monitorizar, de forma mais cuidada, como estas verbas são gastas, avaliando os benefícios que trouxeram para aqueles alunos e comunidade educativa. Alguns especialistas precisam de trabalhar a tempo inteiro numa determinada escola, para a conhecerem bem, compreenderem a sua cultura de escola, identificando necessidades e formas de lhes responderem. Isto não é compatível com um especialista que se divide por cinco ou seis escolas, onde trabalha muito poucas horas por semana. Por isso, a existência de especialistas, a trabalhar a tempo inteiro nas escolas, é uma questão fundamental e que, em Portugal, está longe de estar resolvida. Isso não acontece por falta de especialistas (ex: psicólogos) no mercado de trabalho. O que falta é que os decisores de políticas educativas e quem aloca verbas para a Educação, reconheça que estes têm de existir em muito maior número, criando carreiras aliciantes, para que estes especialistas queiram ficar a trabalhar nas escolas públicas, durante vários anos. Se esta questão é essencial em escolas públicas que não são escolas de referência (ME, 2008), é-o ainda de forma mais nítidas nestas. Uma escola de referência para cegos, em que a maioria dos professores não sabe Braille, onde não existem impressoras que permitem transformar textos escritos a negro em textos em Braille e vice-versa, nem materiais escolares adaptados para cegos, não faz qualquer sentido, nem promove a inclusão. Algo semelhante pode ser dito em relação às escolas de referência para surdos, espectro do autismo, ou outras.

Como referimos, a formação de professores, inicial e contínua, é um aspecto fundamental para a qualidade dos processos de ensino e de aprendizagem, nomeadamente para saber implementar uma educação intercultural e inclusiva. Esta formação necessita de ser muito mais prática, baseada na análise de casos reais, descritos em suporte papel, mas também em vídeo, pois permitem uma análise mais aprofundada das práticas. Deve recorrer também ao *role-playing* e à discussão de situações hipotéticas e formas de actuação mais adequadas, onde se exploram formas de actuação relativas às diversas condições de AESE. Quando é possível assistir a aulas e discuti-las, posteriormente, isso é também

muito enriquecedor. A formação contínua de professores deveria ser negociada entre cada escola e algumas instituições de ensino superior, através de protocolos que permitissem proporcionar uma formação mais adequada às necessidades específicas daquela escola. O mesmo deveria suceder com grupos de investigação, nomeadamente com os que recolhem dados naquela escola. Por isso, concebemos a própria formação como um trabalho colaborativo e dialógico, entre diversas instituições, bem como entre estas e os especialistas de um determinado domínio. No projecto IC elaborámos e pusemos em prática diversos cursos e acções de formação que resultaram de necessidades de determinadas escolas, onde o IC participava, e que se revelaram, depois, úteis noutras escolas. Este diálogo entre diferentes especialistas, parece-nos fundamental, apesar de muito pouco valorizado e fomentado, habitualmente.

A formação inicial de professores deve incluir um estágio remunerado, em que os professores estagiários sejam responsáveis por turmas, como já aconteceu anteriormente. Esta opção justifica-se por ser aquela que, de longe, garante uma melhor formação inicial. Porém, faz ainda mais sentido numa época em que existe uma acentuada falta de professores, como acontece hoje em dia, em Portugal. No ano lectivo 2023/24 houve turmas que nunca tiveram professor a uma disciplina e, este ano (2024/25), a falta de professores continua a fazer-se sentir. A legislação mais recente (AR, 2023, 2024) reconheceu isso mesmo, voltando a ser atribuídas 12h semanais a cada professor estagiário, no último ano dos Mestrados em Ensino. Se possível, a carga lectiva deve contemplar uma turma do ensino básico e outra do ensino secundário. Nestes documentos, considera-se que o professor estagiário será acompanhado, na escola, por um orientador cooperante. Para que esta formação seja mais completa, existirem orientadores da universidade, da área científica e da componente pedagógica, como acontecia na época do projecto IC, revela-se também uma mais-valia. Assim, é essencial que o primeiro ano de prática profissional seja supervisionado. Quando o professor estagiário fez previamente formação inicial, para poder participar num projecto de investigação, como relatamos num dos exemplos analisados, esta formação inicial é ainda mais completa. Prepara-o melhor para, depois, ser capaz de leccionar de forma a promover uma educação intercultural e inclusiva e, ainda, para ser, ele próprio, capaz de proporcionar formação a outros colegas. Por isso

mesmo, a participação em projectos de investigação deveria ser incentivada e deveria fazer parte das vivências universitárias dos futuros professores, como acontecia no projecto IC.

Muitos dos critérios que focámos relacionam-se com a organização escolar, na qual as escolas têm alguma autonomia: a organização dos horários; a diminuição da excessiva burocratização; a decisão sobre reuniões (ex: Conselho Pedagógico; Conselho de Turma); a utilização dos espaços e das verbas alocadas àquela escola, entre muitos outros aspectos. Isto significa que, se uma parte destas questões é da responsabilidade do sistema de ensino e dos decisores políticos, outra é das escolas, que também precisam de promover uma reflexão mais aprofundada sobre estas questões. Por exemplo, em Portugal, são as escolas que decidem trabalhar por trimestres (1.º. 2.º e 3.º período) ou por semestre (1.º e 2.º semestre). Se os semestres podem ser adequados no ensino secundário – e, mesmo isto, mereceria uma discussão e reflexão aprofundadas, nomeadamente no que implicaria fazer, em termos de avaliação formativa e sumativa – até ao final do 2.º ciclo do ensino básico é particularmente desajustado trabalhar por semestres. No entanto, não se assistiu a uma discussão, baseada em conhecimento científico, nem a uma avaliação rigorosa e detalhada, quanto aos impactes destas mudanças. Daí que seja um dos critérios prioritários para promover uma educação de qualidade, que as mudanças só sejam implementadas depois de uma avaliação séria e aprofundada das medidas anteriores, algo que não tem acontecido.

No que se refere à legislação, é urgente passar dos discursos às práticas. Uma parte significativa dos princípios enunciados nestes documentos, nas práticas não se observam, o que prejudica os alunos e os professores, nos diversos níveis de ensino. Por exemplo, nos documentos que regem o Estatuto da Carreira Docente (ECD), está prevista uma diminuição da carga horária, a partir dos 50 anos de idade dos professores (MEC, 2012). Considerando-se a profissão docente de rápido desgaste, esta diminuição faz todo o sentido. Porém, devido à falta de professores, esta legislação não tem sido respeitada em muitas escolas. Os professores, em vez da diminuição, têm a atribuição de outras funções da componente não lectiva, que envolvem, na mesma, trabalharem com alunos. Convém realçar que, se precisamos de formar mais professores, e de evitar que os docentes

peçam aposentações antecipadas, como tem acontecido nos últimos anos, tornar a carreira mais aliciante e cumprir o que está previsto na legislação, parece-nos fundamental.

As mudanças legislativas demasiado frequentes, como se tem observado nas últimas décadas, criam desânimo e frustração nas comunidades educativas, que tendem a não lhes aderir, porque sabem que, em breve, aquela decisão será revogada. Por isso, também aqui seria essencial que as avaliações fossem mais criteriosas, em relação a medidas anteriores, evitando desperdiçar verbas, que não são abundantes. César (2012b) discute alguns destes problemas e indica caminhos possíveis, alguns deles muito fáceis de implementar. Considerar, na colocação de professores, a formação complementar dos docentes em relação aos alunos com necessidades de AESE, é inegável que traria benefícios. No entanto, apesar do reconhecimento da justeza desta medida e de que não implicaria grandes despesas, nem seria muito difícil de implementar, algo discutido quando se realizou uma conferência plenária na Assembleia da República sobre Educação Especial (César, 2012b), 12 anos depois essa modificação ainda não foi implementada, nem discutida nesta assembleia.

Por último, convém realçar que, quando se pretende fazer algo inovador numa escola, é preciso estar disposto a tratar das questões burocráticas inerentes, como mostram os diversos exemplos que analisámos e discutimos, nomeadamente nas escolas em que se operacionalizou uma mediação cultural bi-unívoca (César, 2017). É algo trabalhoso, mas cujos resultados compensam, como mostram alguns dos exemplos discutidos nesta escola (César, 2013b, 2017; César & Machado, 2024b) e noutra escola da Grande Lisboa (César et al., 2014; César & Machado, 2025), que ilustram o que pode ser conseguido, mesmo com a legislação existente. Isto significa que as equipas dos projectos de investigação devem actuar, como salientava Leite (2003), enquanto "amigo crítico", ou seja, contribuindo para um nível mais aprofundado e sustentado, na literatura da especialidade, de reflexão sobre as práticas, facilitando a implementação de uma educação de qualidade para todos.

Promover uma educação intercultural e inclusiva, que contribua para o *empowerment* dos alunos e para o seu acesso ao sucesso escolar, é algo que necessita ser feito nestes três domínios: na sala de aula, na escola e no sistema de ensino.

Os professores, alunos, investigadores, famílias e outros agentes educativos podem actuar sobretudo ao nível da sala de aula e da escola. Por isso, foi neste cenário (sala de aula) e contexto (educativo, numa determinada escola) que os projectos de investigação-acção do IC fizeram as suas intervenções, cujos impactes ilustrámos. Isto significa que muito se pode mudar, actuando nestes dois níveis. Porém, para que sejam mais nítidos e pregnantes, mais extensíveis a todas as escolas e à sociedade, em geral, é preciso que também existam mudanças ao nível do sistema de ensino, ou seja, influenciar os decisores políticos a partir dos dados da investigação. Estes impactes são mais lentos, sujeitos a avanços e recuos, próprios da alternância política que tem caracterizado o país, nos últimos anos. Em Portugal, à semelhança do que acontece noutros países, as decisões e leis referentes à Educação podiam ser aprovadas para 10 ou 12 anos, permitindo, posteriormente, uma avaliação mais sustentada dos seus impactes. Ao serem votadas por todos, na Assembleia da República, não precisariam de ser alteradas cada vez que muda o Governo ou o Ministro. Isso promove decisões mais fundamentadas, tomadas com maior ponderação.

Como afirma Freire (2021), é preciso agir para construirmos um futuro melhor, mais justo, mais equitativo, sem discriminações e exclusões dos mais vulneráveis. É necessário assumir que a educação intercultural e inclusiva se constrói em cada interacção, em cada decisão e que é necessário estar atento e lutar para que ela se operacionalize no quotidiano de cada escola, sociedade, comunidade e cultura. Daí que ele fale de "esperança do verbo esperançar" e não do verbo "esperar". Porque não basta esperar, é preciso agir e distribuir o poder, para que todos tenham voz(es), e se sintam empoderados, agindo como participantes legítimos nos domínios do seu interesse.

> É preciso ter esperança, mas ter esperança do verbo esperançar; porque tem gente que tem esperança do verbo esperar. E esperança do verbo esperar não é esperança, é espera. Esperançar é se levantar, esperançar é ir atrás, esperançar é construir, esperançar é não desistir! Esperançar é levar adiante, esperançar é juntar-se com outros para fazer de outro modo. (Freire, 2021, p. 51)

Parafraseando Freire (2021), a educação intercultural e inclusiva é juntar-se com outros para fazer de outro modo, para promover a equidade e a justiça social. Mas, como salientou João dos Santos, "o importante é comunicar. O importante é prepararmo-nos para o encontro" (Carvalho e Branco, 2000, p. 70). Este excerto realça dois aspectos fundamentais: (1) construímo-nos na interacção, na comunicação, pelo que esta tem um papel essencial nas trajectórias de participação ao longo da vida que traçamos (César, 2009, 2013a, 2017, 2024b; César & Machado, 2025); e (2) precisamente porque a comunicação é tão importante, temos de nos preparar para ela, desenvolvendo a qualidade relacional (César et al., 2014). É nesta preparação que entra a formação inicial e contínua de professores, psicólogos e outros agentes educativos, incluindo os pais e as famílias. Mas também é nesta preparação que entra o trabalho para decidir como será a primeira semana de aulas, como se operacionaliza o currículo, o contrato didáctico que se negoceia com os alunos e os instrumentos de avaliação que se utilizam. Não basta boa-vontade. É preciso desenvolver uma consciência epistemológica nos professores e investigadores (César, 2008, 2010, 2017), é necessário conhecimento profissional (*know-how*), que permita tornar as práticas interculturais e inclusivas, promovendo o sucesso escolar, as aprendizagens e o desenvolvimento, de todo e qualquer aluno (César, 2024b; César et al., 2014; César & Machado, 2024a, 2024b, 2025).

Também Skovsmose (2019) define educação inclusiva salientando a importância dos encontros (*meetings*) e assumindo que são eles que podem promover uma educação com estas características. A definição que usa é particularmente inspiradora: "uma educação que tenta estabelecer encontros entre as diferenças" (p. 79).

> Conceptualizamos a educação inclusiva como uma educação que tenta ir além das diferenças, e não como uma educação que tenta incluir os deficientes na normalidade. Essa ideia leva-nos à noção de encontro. Poderíamos pensar nos encontros entre diferenças como sendo uma categoria humana principal. Esta ideia inspira-me a interpretar a educação inclusiva *como uma educação que tenta estabelecer encontros entre as diferenças*. (Skovsmose, 2019, p. 79, itálico no original)

O projecto IC tentou criar condições práticas, em aula, para que esses "encontros entre as diferenças" pudessem acontecer e, para além disso, para que cada aluno sentisse as suas diferenças respeitadas e valorizadas. Para que a diversidade fosse celebrada, para que fosse vista como um contributo para o desenvolvimento, aprendizagem e empoderamento de cada aluno. Para que todos os alunos conseguissem aprender com as diferenças que existem em cada turma e em cada escola. Os resultados do IC iluminam como isso foi conseguido e, sobretudo, como teve impactes a médio e a longo prazo, algo que só se tornou visível devido à existência de um *follow-up* de 10 anos, que terminou formalmente em Junho/Julho de 2016. Particularmente relevante é que, assumindo-se como participantes legítimos (César, 2009, 2017, 2024b; Lave & Wenger, 1991), empoderados e com voz(es) que sabiam expressar, os alunos decidiram continuar a enviar-nos informações que achavam pertinentes, ou a dialogar connosco em momentos de crise mundial, como a pandemia. Isso ilumina como os impactes do IC vão muito além do inicialmente previsto e continuam a fazer-se sentir mesmo muitos anos depois da participação neste projecto, contribuindo para uma sociedade mais intercultural e inclusiva.

Para que os encontros de que falam Farrell (2006), Freire (2021), João dos Santos (Carvalho e Branco, 2000) e Skovsmose (2019) sejam frutuosos, é necessário que os diversos especialistas, que acompanham um determinado aluno, comuniquem entre si e usem uma linguagem que não seja demasiado hermética, para não impedirem a comunicação com os que trabalham noutros domínios do conhecimento. É precisa mediação cultural bi-unívoca (César, 2017), para que todos se sintam respeitados e valorizados. Como salientava João dos Santos, "é necessário fazer participar os pais e os técnicos, as famílias e as comunidades, na organização e no suporte das instituições" (Carvalho e Branco, 2000, p. 48), algo que ele fez em relação às escolas, associações e clínicas que fundou e, depois, fez funcionar sem a sua actuação directa, num exemplo do que é distribuir o poder e fomentar a autonomia. João dos Santos, é um pedagogo inclusivo *avant la lettre*, pois muito antes da Declaração de Salamanca (UNESCO, 1994), muito antes desta designação existir, já recorria a práticas que eram profundamente inclusivas. Isso ilustra como, mesmo numa época politicamente perigosa (Estado Novo), com condições de trabalho desafiadoras, mesmo pondo em risco a sua

vida e carreira, pois teve de viver exilado diversos anos, é responsabilidade de cada um contribuir para uma educação e sociedade intercultural e inclusiva, para uma Escola e sociedades mais equitativas e com maior justiça social.

Agradecimentos

O projecto *Interacção e Conhecimento* (IC) foi financiado pelo *Instituto de Inovação Educacional* (IIE), medida SIQE2 (Projecto n.º 7/96), em 1996/97 e 1997/98, e pelo *Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa* (CIEFCUL), entre 1996 e 2008. Ao Ricardo Machado foi atribuída uma bolsa para doutoramento, em dedicação exclusiva, entre 2009/10 e 2012/13, pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT), com a referência SFRH/BD/64821/2009.

As trajectórias de participação ao longo da vida, incluindo a investigação científica, são empreendimentos sociais, dialógicos e colaborativos. As nossas foram configuradas pelas pessoas que, profissionalmente, nos fizeram apreciar e valorizar a diversidade, como João dos Santos, Anne-Nelly Perret-Clermont, Paul Cobb, Peter Renshaw ou Mel Ainscow, entre muitos outros. Uma imensa gratidão ao Carlos Albuquerque, por ter escrito o prefácio deste livro e partilhado, connosco, uma parte significativa da nossa trajectória de participação ao longo da vida, em contexto profissional. Uma enorme gratidão à Sofia Coelho, com quem trabalhamos há muitos anos e que nos ajudou em relação às traduções da língua inglesa. Um profundo agradecimento à equipa do projecto IC e aos diversos participantes, sobretudo aos alunos cujos excertos constam deste livro e que, connosco, discutiram as interpretações que elaborámos. Um agradecimento especial à editora deste livro, que nos ajudou a expressar estas vozes, e cujo apoio foi essencial para que ele fosse publicado.

Nota: Por vontade expressa dos autores, este texto não segue o acordo ortográfico de 1990, implementado em Portugal a partir de 2008.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: A experiência do projecto MAT789*. Associação de Professores de Matemática (APM). [Tese de doutoramento, apresentada na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa – FCUL]

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Ministério da Educação/ Departamento de Educação Básica.

Abreu, G. de, Bishop, A., & Pompeu Jr., G. (1997). What children and teachers count as mathematics. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 233-264). Psychology Press.

Abreu, G. de, Bishop, A., & Presmeg, N. C. (2002). *Transitions between contexts of mathematical practices*. Kluwer Academic Publishers.

Abreu, G. de, & Elbers, E. (Eds.) (2005). Special issue: The social mediation of learning in multiethnic schools. *European Journal of Psychology of Education*, *XX*(1). https://doi.org/10.1007/BF03173207

Ainscow, M. (1991). *Effective schools for all*. David Fulton Publishers.

Ainscow, M. (1999). *Understanding the development of inclusive schools*. Falmer Press. https://doi.org/10.4324/9780203016619

Ainscow, M., & César, M. (2006). Inclusive education ten years after Salamanca: Setting the agenda. *European Journal of Psychology of Education*, *XXI*(3), 231-238. https://doi.org/10.1007/BF03173412

Ainscow, M., & Ferreira, W. (2003). Compreendendo a educação inclusiva: Algumas reflexões sobre experiências internacionais. In D. Rodrigues (Ed.), *Perspectivas sobre a inclusão: Da educação à sociedade* (pp. 103-116). Porto Editora.

Ainscow, M., Porter, G., & Wang, M. (2000). *Caminhos para as escolas inclusivas*. Instituto de Inovação Educacional (IIE).

Allan, J. (2008). *Rethinking inclusive education. The philosophers of difference in practice*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6093-9

Allan, J., & Slee, R. (2008). *Doing inclusive education research*. Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087904197

Alves, A. R. (2023). *Beyond loss: Race, displacement and the political*. Coimbra. [Tese de doutoramento apresentada na Universidade de Coimbra] https://hdl.handle.net/10316/114199

Anastasi, A. (2003). *Testes psicológicos*. Editora Pedagógica Universitária.

Apple, M. (1995). Taking power seriously: New directions in equity in mathematics education and beyond. In W. Secada, E. Fennema, & L. Adajian (Eds.), *New directions for equity in mathematics education* (pp. 329-348). Cambridge University Press.

Apple, M. (1999). What counts as legitimate knowledge? The social production and use of reviews. *Review of Educational Research*, *69*(4), 343-346. https://doi.org/10.3102/00346543069004343

Apple, M. (2002). Power, meaning and identity: Essays in critical educational studies. Peter Lang.

Apple, M. (2009). Global crisis, social justice, and education. Routledge.

Armstrong, F., Armstrong, D., & Barton, L. (2000). *Inclusive education: Policy, contexts and comparative perspectives*. David Fulton Publishers. https://doi.org/10.4324/9780203065075

Armstrong, F., & Moore, M. (Eds.) (2004). *Action research for inclusive education*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203596012

Assembleia da República (AR) (1986). Lei n.º 46/86, de 14 de outubro: Lei de bases do sistema educativo. *Diário da República*, I Série, n.º 237. Imprensa Nacional Casa da Moeda (INCM).

AR (2005). Constituição da República Portuguesa, VII revisão constitucional (2005). INCM.

AR (2008). Lei n.º 21/08, de 12 de Maio. *Diário da República* – I Série, n.º 91. INCM.

AR (2018). Decreto-Lei n.º 54/18, de 6 de Julho. *Diário da República* – I Série, n.º 129. INCM.

AR (2023). Decreto-Lei n.º 112/2023, de 29 de novembro. *Diário da República* - 1.ª Série, n.º 231. INCM.

AR (2024). Decreto-Lei n.º 23/2024, de 19 de março. *Diário da República* - 1.ª Série, n.º 56. INCM.

Associação Portuguesa de Apoio à Vítima (APAV) (2023). *Bullying: Estatísticas APAV 2020-2022*. APAV.

APAV (2024). Violência Doméstica 2021-2023: Estatísticas APAV. APAV.

Bakhtin, M. (1929/1981). *The dialogical imagination* (M. Holquist, Ed.) (C. Emerson, & M. Holquist, Trad.). University of Texas Press. [Original publicado em russo em 1929]

Baraldi, I., Rosa, F., Capellini, V., Rosa, E., & Miranda, E. (2019). School inclusion: Considerations about the education process of teachers who teach mathematics. In D. Kollosche, R. Marcone, M. Knigge, M. G. Penteado, & O. Skovsmose (Eds.), *Inclusive mathematics education: State-of-the-art research from Brazil and Germany* (pp. 24-40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11518-0

Barwell, R. (Ed.). (2009). *Multilingualism in mathematics classrooms*. Multilingual Matters.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–909). National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Baucal, A., Arcidiacono, F., & Budevac, N. (Eds.) (2011). *Studying interactions in different contexts: A qualitative view*. Institute of Psychology Belgrade.

Beccuti, F., & Robutti, O. (2022). Teaching mathematics in today's society: Didactical paradigms, narratives and citizenship. *For the Learning of Mathematics*, *42*(2), 29–34.

Berge, A., & Santos, J. dos (1976). *A higiene mental na escola*. Livros Horizonte.

Billington, T. (2000). *Separating, loosing and excluding children: Narratives of difference*. Routledge Falmer. https://doi.org/10.4324/9780203136140

Binet, A., & Simon, T. (1904). Méthodes nouvelles pour le diagnostic du niveau intellectuel des anormaux. *Année Psychologique*, *11*, 191-244.

Bishop, A. (2001). What values do you teach when you teach mathematics?. *Teaching Children Mathematics*, *7*(6), 346-349. http://www.jstor.org/stable/41199894

Borba, V., Lima, A., & Cavalcanti, J. (2024). Tipologia do contrato didático: Um estudo teórico. *Bolema*, *38*(78). https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230056

Borges, I. (2009). *Alunos surdos e a matemática: Dois estudos de caso, no 12.º ano de escolaridade do ensino regular*. APM. [Dissertação de mestrado, apresentada no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa – DEFCUL]

Borges, I. (2017). *Inclusão, transições e matemática: Dois estudos de caso sobre os percursos académicos de dois estudantes surdos*. APM. [Tese de doutoramento apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa – FCT-UNL]

Borges, I., & César, M. (2011). Processos de inclusão de dois alunos Surdos em aulas de matemática do 12.º ano de escolaridade. *Educação Inclusiva*, *2*(2), 8-17. http://hdl.handle.net/10451/5065

Borges, I., & César, M. (2012). Eu leio, tu ouves, nós aprendemos: Experiências de aprendizagem matemática e vivências de inclusão de dois estudantes Surdos, no ensino regular. *Interacções*, *8*(20), 141-180. https://doi.org/10.25755/int.488

Borges, I., César, M., & Matos, J. M. (2012). Two Deaf students attending a mainstream mathematics class: Challenging the interaction and collaboration between home and school. In J. Díez-Palomar, & C. Kanes (Eds.), *Family and community in and out of the classroom: Ways to improve mathematics' achievement* (2.ª ed.) (pp. 77-88). Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

Borges, I., César, M., & Matos, J. M. (2014). 'Não sabiam que eu vinha?': A transição de dois estudantes Surdos do ensino secundário para o universitário. *Interacções*, *10*(33), 87-127. https://doi.org/10.25755/int.6732

Brousseau, G. (1988). Le contract didactique: Le milieu. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *9*(3), 309-336. https://revue-rdm.com/1988/le-contrat-didactique-le-milieu/

Carmo, D. (2024, 8 julho). Provas de 9.º ano: Média melhora a Matemática, mas "subida não é factual". *Público*. https://www.publico.pt/2024/07/08/sociedade/noticia/provas-9-ano-media-melhora-matematica-subida-nao-factual-2096866

Carmo, R., Tavares, I., Assis, R., Barradas, R., & Suleman, F. (2024). *Jovens e o trabalho em Portugal: Desigualdades, (des)proteção e futuro*. Actual Editora.

Carvalho, C. (2001). Interacção entre pares: Contributos para a promoção de desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico, no 7.º ano de escolaridade. APM. [Tese de doutoramento apresentada na FCUL]

Carvalho e Branco, M. E. (2000). *Vida, pensamento e obra de João dos Santos*. Livros Horizonte.

César, M. (1994). O papel da interacção entre pares na resolução de tarefas matemáticas: Trabalho em díade vs. trabalho individual em contexto escolar. [Tese de doutoramento apresentada na FCUL]

César, M. (1996). Primeiras aprendizagens: Alguns aspectos relevantes. *Educação e Matemática*, *40*, 18-19. https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/42

César, M. (1998a). Disciplina/indisciplina: E quem nos explica o mundo?. *Educação e Matemática*, *46*, 1-2. https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/48

César, M. (1998b). Y si aprendo contigo? Interacciones entre parejas en el aula de matemáticas. *Uno*, *16*, 11-23.

César, M. (2000). Interacções sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: A investigação contextualizada. In J. P. Ponte, & L. Serrazina (Eds.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália: Actas da escola de verão em educação matemática, 1999* (pp. 5-46). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação - Secção de Educação Matemática (SPCE-SEM). https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/ESCOLA_DE_VERAO_1999.pdf

César, M. (2001/2004). Y si aprendo contigo? Interacciones entre parejas en el aula de matemáticas. In Graó (Ed.), *Estrategias organizativas de aula: Propuestas para atender la diversidad* (pp. 159-173). Graó.

César, M. (2002). E depois do adeus?: Reflexões a propósito de um follow up de duas turmas de um currículo em alternativa. In D. Moreira, C. Lopes, I. Oliveira, J. M. Matos, & L. Vicente (Eds.), *Matemática e comunidades: A diversidade social no ensino-aprendizagem da matemática* (pp. 93-104). SPCE-SEM & IIE.

César, M. (2003). A escola inclusiva enquanto espaço-tempo de diálogo de todos e para todos. In D. Rodrigues (Ed.), *Perspectivas sobre a inclusão: Da educação à sociedade* (pp. 117-149). Porto Editora.

César, M. (2008, Outubro). *Relatório sobre a disciplina de psicologia da educação*. [Relatório apresentado no âmbito do concurso para professora associada, documento policopiado]. DEFCUL. http://hdl.handle.net/10451/5701

César, M. (2009). Listening to different voices: Collaborative work in multicultural maths classes. In M. César, & K. Kumpulainen (Eds.), *Social interactions in multicultural settings* (pp. 203-233). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087907174_010

César, M. (2010). Comment to Paola's conference: Dialogism in action. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. LXXXVII-XCIII). Institut National de Recherche Pédagogique (INRP). http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/plenary-2

César, M. (2012a). O papel das famílias nos processos de aprendizagem matemática dos alunos: Caminhos para a inclusão ou retratos de formas (subtis) de exclusão?. *Interacções*, *8*(20), 255-292. [Número temático – Desafios no ensino e na aprendizagem da matemática, editores Gracinda Hamido, Neusa Branco, & Ricardo Machado]. https://doi.org/10.25755/int.492

César, M. (2012b). Educação especial: Pequenos passos, alguns retrocessos e muito caminho para andar. *Interacções*, *8*(21), 68-94. https://doi.org/10.25755/int.1523

César, M. (2013a). Collaborative work, dialogical self and inter-/intra-empowerment mechanisms: (Re)constructing life trajectories of participation. In M. B. Ligorio, & M. César (Eds.), *Interplays between dialogical learning and dialogical self* (pp. 151-192). Information Age Publishing (IAP).

César, M. (2013b). Cultural diversity and regulatory dynamics of participation between schools and families. In P. Marsico, K. Komatzu, & A. Iannaccone (Eds.), *Crossing boundaries: Intercontextual dynamics between family and school* (pp. 35-81). IAP.

César, M. (2014). Inter- and intra-empowerment mechanisms: Contributions to mathematical thinking and achievement. In T. Zittoun, & A. Iannaccone (Eds.), *Activities of thinking in social spaces* (pp. 167-186). Nova Science Publishers, Inc.

César, M. (2017). Trajectoire de vie et de participation d'une femme qui partage la culture du Cap-Vert et du Portugal. *Diplômées*, July 2017, 260-261, 86-111. https://www.associationdesfemmesdiplomees.fr/diplômées/

César, M. (2024a). Collaborative work and teaching and learning processes in mathematics: The importance of inter- and intra-empowerment mechanisms. In M. Giglio, & F. Arcidiacono (Eds.), *Social interactions in the classroom: Thoughts and perspectives* (pp. 45-62). Peter Lang. https://doi.org/10.3726/b21942

César, M. (2024b). Personal performance shapers (PPS): Their importance in Mathematics achievement and in pupils' empowerment. *GAS Journal of Education and Literature* (GASJEL), *1*(4), 67-84. https://doi.org/10.5281/zenodo.14030298

César, M., & Ainscow, M. (Eds.) (2006). Special issue: Inclusive education ten years after Salamanca. *European Journal of Psychology of Education*, *XXI*(3). https://doi.org/10.1007/BF03173412

César, M., & Calado, C. (2010). É só para passar o tempo?: Currículos com sentido em educação inclusiva. *Interacções*, *6*(15), 68-114. https://doi.org/10.25755/int.427

César, M., & Kumpulainen, K. (Eds.) (2009). *Social interactions in multicultural settings*. Sense Publishers.

César, M., & Machado, R. (2012). Listening to different voices about mathematics learning: Teachers', students' and families' accounts. In J. Díez-Palomar, & C. Kanes (Eds.), *Family and community in and out of the classroom: Ways to improve mathematics' achievement* (2.ª ed.) (pp. 89-100). UAB.

César, M., & Machado, R. (2024a). Different languages, different Mathematics learning. *Journal of Research in Mathematics Education (REDIMAT)*, *13*(2), 180-197. https://doi.org/10.17583/redimat.14421

César, M., & Machado, R. (2024b). Respecting cultural diversity in Mathematics classes. *GAS Journal of Education and Literature* (GASJEL), *1*(4), 96-114. https://doi.org/10.5281/zenodo.14131090

César, M., & Machado, R. (2025). Promoting an inclusive education through collaborative and dialogical work in Mathematics classes and research. *GAS Journal of Education and Literature* (GASJEL), *2*(2), 58-80. https://doi.org/10.5281/zenodo-15221765

César, M., Machado, R., & Borges, I. (2013). School and family interplays: Some challenges regarding mathematics education. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the eighth congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 1686-1696). Middle East Technical University.

César, M., Machado, R., & Ventura, C. (2014). Praticar a inclusão e não apenas falar de inclusão. *Interacções*, *10*(33), 18-72. https://doi.org/10.25755/int.6730

César, M., & Oliveira, I. (2005). The curriculum as a mediating tool for inclusive participation: A case study in a Portuguese multicultural school. *European Journal of Psychology of Education*, *XX*(1), 29-43. https://doi.org/10.1007/BF03173209

César, M., Perret-Clermont, A.-N., & Benavente, A. (2000). Modalités de travail en dyades et conduites à des tâches d'algèbre chez des élèves portugais. *Revue Suisse des Sciences de l'Education*, *22*(3), 443-466. https://doi.org/10.25656/01:3748

César, M., & Santos, N. (2006). From exclusion into inclusion: Collaborative work contributions to more inclusive learning settings. *European Journal of Psychology of Education*, *XXI*(3), 333-346. https://doi.org/10.1007/BF03173420

César, M., Ventura, C., & Machado, R. (2013). Ver a Matemática na ponta dos dedos: Inclusão e equidade vivenciados por alunos cegos. In L. Lima-Rodrigues & D. Rodrigues (Eds.), *Atas do III congresso internacional educação inclusiva e equidade* (Parte II, pp. 781-799). Pro-Inclusão: Associação Nacional de Docentes de Educação Especial (Pin-ANDEE).

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). D. Reidel. https://doi.org/10.1007/978-94-009-4504-3_7

Civil, M. (2007). Building on community knowledge: An avenue to equity in Mathematics. In N. Nassir, & P. Cobb (Eds.), *Improving access to mathematics: Diversity and equity in the classroom* (pp. 105-117). Teachers College Press.

Civil, M. (2012). Mathematics teaching and learning of immigrant students: An overview of the research field across multiple settings. In O. Skovsmose, & B. Greer (Eds.), *Opening the cage: Critique and politics of mathematics education* (pp. 127–142). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-808-7_6

Civil, M. (2020). Immigrant students in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 359–365). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_73

Civil M., & Hunter, R. (2015). Participation of non-dominant students in argumentation in the mathematics classroom. *Intercultural Education*, *26*, 296-312. https://doi.org/10.1080/14675986.2015.1071755

Clandinin, D. J., & Connelly, F. M. (1998). Personal experience methods. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Collecting and interpreting qualitative materials* (pp. 150-178). Sage Publications.

Cobb, P. (2006). Mathematics learning as a social practice. In J. Maasz, & W. Schloeglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 147-152). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087903510_014

Cobb, P. (2012). *Conducting teaching experiments in collaboration with teachers*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410602725.CH12

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (2012). The emergence of mathematical meaning interaction in classroom cultures. Routledge.

Cobb, P., & Hodge, L. L. (2007). Culture, identity, and equity in the mathematics classroom. In N. Nasir, & P. Cobb (Eds.), *Improving access to mathematics: Diversity and equity in the classroom* (pp. 159-171). Teachers College Press. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9729-3_11

Cooperative Learning Center of The Minnesota University (2009). *Cooperative learning*. Recuperado em Março 17, 2009, de http://www.co-operation.org

Cornelius, L. L., & Herrenkohl, L. R. (2004). Power in the classroom: How the classroom environment shapes students' relationships with each other and with concepts. *Cognition and Instruction*, *22*(4), 467-498. https://doi.org/10.1207/s1532690Xci2204_4

Courela, C. (2007). Começar de novo: Contributos de um currículo em alternativa para percursos de vida inclusivos, de estudantes adultos. A mediação dos trabalhos de projecto colaborativos desenvolvidos em educação ambiental. FCUL. [Tese de doutoramento apresentada na FCUL] http://hdl.handle.net/10451/42640

Courela, C. (2014). Dez anos é muito tempo... Trajectórias de uma adulta que aceitou o desafio de um percurso inovativo formador. In I. Sanches (Ed.), *Para uma educação inclusiva: Dos conceitos às práticas* (vol. III, pp. 58-84). Edições Universitárias Lusófonas.

Courela, C., & César, M. (2004). Adult education and development of environmental literacy: Contributions of a project of pedagogic innovation. In W. Leal Filho, & M. Littledyke (Eds.), *International perspectives in environmental education* (pp. 209-222). Peter Lang.

Courela, C. & César, M. (2008). Educação formal de adultos e cidadania: Contributos da educação ambiental para percursos de participação e inclusão. *Educação, Sociedade & Culturas*, *27*, 193-210. http://hdl.handle.net/10451/6427

Courela, C., & César, M. (2012). Inovação educacional num currículo emancipatório: Um estudo de caso de um jovem adulto. *Currículo sem Fronteiras*, *12*(2), 326-363.

Courela, C., & César, M. (2014). Crafting a neo-Vygotskian approach to adult education in Portugal: Collaborative project work in an alternative curriculum. *Psychology in Russia: State of the Art*, *7*(3), 76-89. https://doi.org/10.11621/PIR.2014.039

Cristo, I. (2008). *Embalados! No trabalho colaborativo: Um estudo de caso no 1.º ciclo do ensino básico*. APM. [Dissertação de Mestrado apresentada no DEFCUL] http://hdl.handle.net/10451/1270

Davies, K., & Renshaw, P. (2013). Being aspie or having Asperger Syndrome: Learning and the dialogical self at the wrongplanet.com. In M. B. Ligorio, & M. César (Eds.), *The interplays between dialogical learning and dialogical self* (pp. 393-418). IAP.

Davis, B., Okamoto,Y., & Whiteley, W. (2015). Spatializing school mathematics. In B. Davis (Ed.), *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp.139–150). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315762371

Denzin, N. K. (2002). The interpretative process. In A. Haberman, & M. Miles (Eds.), *The qualitative researcher's companion* (pp. 349-366). Sage Publications.

Direção-Geral do Ensino Superior (DGES) (2024). Nota sobre a divulgação dos resultados do acesso ao ensino superior público - 2024. DGES.

Direção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência (DGEEC) (2023). *Estatísticas da Educação 2021/2022*. DGEEC.

Dumas, M. (Produtor) (2009, Janeiro 26). *Vie privée vie publique* [Programa de televisão]. France 3.

Ernest, P. (Eds.) (2024). Ethics and mathematics education: The good, the bad and the ugly. Springer.

Farrell, P. (2006). Developing inclusive practices among educational psychologists: Problems and possibilities. *European Journal of Psychology of Education*, *XXI*(3), 293-304. https://doi.org/10.1007/BF03173417

Faustino, A. C., & Skovsmose, O. (2020). Dialogic and non-dialogic acts in learning mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *40*(1), 9-14. https://flm-journal.org/Articles/1101E1A57F257D519C4F4A27D14557.pdf

Frankenstein, M. (1983). Critical mathematics education: An application of Paulo Freire's epistemology. *Journal of Education*, *164*, 315-339. https://doi.org/10.1177/002205748316500403

Frankenstein, M. (2012). Beyond math content and process: Proposals for underlying aspects of social justice education. In A. A. Wager, & D. W. Stinson (Eds.), *Teaching mathematics for social justice: Conversations with mathematics educators* (pp. 49-62). NCTM.

Freeman, F. S. (1976). *Teoria e prática dos testes psicológicos*. Fundação Calouste Gulbenkian.

Freire, P. (1996). Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à prática educativa. Paz e Terra.

Freire, P. (1999). *Educação e mudança*. Paz e Terra.

Freire, P. (2002). *Pedagogia do oprimido*. Paz e Terra.

Freire, P. (2021). *Pedagogia da esperança: Um reencontro com a pedagogia do oprimido* (28.ª ed.). [Prefácio de Leonardo Boff; notas de Ana Maria Araújo Freire]. Paz e Terra.

Giglio, M., & Arcidiacono, F. (Eds.) (2017). *Les interactions sociales en classe: Réflexions et perspectives* (pp. 35-53). Peter Lang. https://doi.org/10.3726/978-3-0343-2351-2

Goldenberg, E. P. (1998). "Hábitos de pensamento": Um princípio organizador para o currículo (I). *Educação e Matemática*, *47*, 31-44.

Halai, A., & Clarkson, P. (Eds.) (2016). *Teaching and learning mathematics in multilingual classrooms*. Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-229-5

Hamido, G., & César, M. (2009). Surviving within complexity: A meta-systemic approach to research on social interactions in formal educational scenarios. In K. Kumpulainen, C. Hmelo-Silver, & M. César (Eds.), *Investigating classroom interactions: Methodologies in action* (pp. 229-262). Sense Publishers.

Hermans, H. (1991). The person as co-investigator in self-research: Valuation theory. *European Journal of Personality*, *5*(3), 217-234. https://doi.org/10.1002/per.2410050304

Hermans, H. (1996). Voicing the self: From information processing to dialogical interchange. *Psychological Bulletin*, *119*(1), 31-50. https://doi.org/10.1037/0033-2909.119.1.31

Hermans, H. (1999). Self-narrative as meaning construction: The dynamics of self investigation. *Journal of Clinical Psychology*, *55*(10), 1193-1211. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-4679(199910)55:10<1193::AID-JCLP3>3.0.CO;2-I

Hermans, H. (2001). The dialogical self: Toward a theory of personal and cultural positioning. *Culture and Psychology*, *7*(3), 323-366. https://doi.org/10.1177/1354067X0173001

Hermans, H. (2003). The construction and reconstruction of a dialogical self. *Journal of Constructivist Psychology*, *16*(2), 89-130. https://doi.org/10.1080/10720530390117902

Hermans, H. (2008). How to perform research on the basis of dialogical self theory? Intro- duction to the special issue. *Journal of Constructivist Psychology*, *21*(3), 185-199. https://doi.org/10.1080/10720530802070684

Hermans, H., & Kempen, H. (1998). Moving cultures: The perilous problems of cultural dichotomies in a globalizing society. *Journal of American Psychologist*, *53*(10), 1111-1120. https://doi.org/10.1037//0003-066X.53.10.1111

Instituto Nacional de Estatística (INE) (2021). *Census 2020: Resultados definitivos – Portugal*. INE.

Johnson, D., & Johnson, R. (2010). *Introduction to cooperative learning*. Recuperado em janeiro 21, 2010, de https://www.co-operation.org

Kloetzer, L., & Tau, R. (2024). Combiner dialogisme et sociomatérialité: Espaces et artefacts dialogiques en recherche-intervention. In A. Innaccone, E. Cattaruzza, & E. Schwab (Eds.), *Expériences sociomatérielles: Objets, interactions, espaces* (pp. 235-270). Éditions Alphil-Presses Universitaires Suisses.

Kollosche, D., Marcone, R., Knigge, M., Penteado, M. G. & Skovsmose, O. (Eds.) (2019). *Inclusive mathematics education: State-of-the-art research from Brazil and Germany*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11518-0

Kullenberg, T., & Säljö, R. (2022). Towards dialogic metaphors of learning: From socialization to authoring. *Integrative Psychological and Behavioral Science*, *56*, 542-559. https://dx.doi.org/10.1007/s12124-021-09661-5

Kumpulainen, K., & Lipponen, L. (2010). Productive interaction as agentic participation in dialogic inquiry. In C. Howe, & K. Littleton (Eds.), *Educational dialogues* (pp. 48-63). Taylor & Francis.

Lau, P., Singh, P., & Hwa, T.-Y. (2009). Constructing mathematics in an interactive classroom context. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(3), 307-324. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9196-y

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.

Leite, C. (2003). *Para uma escola curricularmente inteligente*. Edições ASA. https://hdl.handle.net/10216/97288

Leite, C. (2006). Políticas de currículo em Portugal e (im)possibilidades da escola se assumir como uma instituição curricularmente inteligente. *Currículo sem Fronteiras*, *6*(2), 67-81.

Leite, C., & Sousa-Pereira, M. F. (2023). Políticas curriculares na relação com políticas de formação inicial de professores em Portugal. *Currículo sem Fronteiras*, *23*, e 1149. https://doi.org/10.35786/1645-1384.v23.1149

Ligorio, M. B., & César, M. (Eds.) (2013). Interplays between dialogical learning and dialogical self. IAP.

Longeot, F. (1966). Expérimentation d'une échelle individuelle de développement de la pensée logique. *Bulletin de l'institut national d'étude du travail et de l'orientation professionnelle* (BINOP), *22*, 306-319.

Longeot, F. (1969). Psychologie différentielle et théorie opératoire de l'intelligence. Dunod.

Longeot, F. (1979). *L'echelle de développment de la pensée logique*. Editions Scientifiques et Psychologiques.

Maass, K., Doorman, M., Jonker, V., & Wijers, M. (2019). Promoting active citizenship in mathematics teaching. *International Journal on Mathematics Education* (ZDM), *51*(6), 991-1003. https://doi.org/10.1007/s11858-019-0048-6

Maass, K., Sorge, S., Hesse, A., Romero-Ariza, M., & Straser, O. (2021). Promoting active citizenship in mathematics and science teaching. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10182-1.

Machado, R. (2011). Brócolos e matemática: Representações sociais da matemática de alunos do 8.º ano de escolaridade. APM. [Dissertação de mestrado apresentada no DEFCUL]

Machado, R. (2014). Trabalho colaborativo e matemática: Um estudo de caso sobre o instrumento de avaliação de capacidades e competências do projeto Interacção e Conhecimento. APM. [Tese de doutoramento apresentada na FCT-UNL] http://hdl.handle.net/10362/12340

Machado, R., & César, M. (2012). Trabalho colaborativo e representações sociais: Contributos para a promoção do sucesso escolar, em matemática. *Interacções*, *8*(20), 98-140. https://doi.org/10.25755/int.495

Machado, R., & César, M. (2013). Contributos das representações sociais e do trabalho colaborativo para o acesso às ferramentas culturais da Matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática/International Journal for Studies in Mathematics Education*, *6*(1), 96-146.

Marková, I. (2005). Dialogicality and social representations: The dynamics of mind. Cambridge University Press.

Marková, I. (2016). *The dialogical mind: Common sense and ethics*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511753602

Marsico, P., Komatzu, K., & Iannaccone, A. (Eds.) (2013). *Crossing boundaries: Intercontextual dynamics between family and school*. IAP. https://doi.org/10.9771/2317-1219rf.v2i2.8646

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge Falmer. https://doi.org/10.4324/9780203471876

McInnerney, J., & Roberts, T. (2004). Collaborative or cooperative learning. In T. Roberts (Ed.), *Online collaborative learning: Theory and practice* (pp. 203-214). Idea Group Publishing. https://doi.org/10.4018/978-1-59140-174-2.ch009

McLay, K. F., & Renshaw, P. (2024). "Can't you just tell us when to teach them how to use an apostrophe?" The worthwhile struggle to cultivate agential preservice teachers in a compliance culture. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education*, *52*(3), 350-365. https://doi.org/10.1080/1359866X.2024.2330081

Meijers, F., & Hermans, H. (Eds.) (2018a*). The dialogical self theory in education: A multicultural perspective*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62861-5

Meijers, F., & Hermans, H. (2018b). Dialogical self theory in education: An introduction. In F. Meijers, & H. Hermans (Eds.), *The dialogical self theory in education: A multicultural perspective* (pp. 1-17). Springer. https://doi.otg/ 10.1007/978-3-319-62861-5_1

Melro, J., & César, M. (2010). Educação inclusiva: Desafios à profissionalidade docente e às aprendizagens dos alunos Surdos. *Educação Inclusiva*, *1*(2), 10-17. http://hdl.handle.net/10451/5962

Melro, J., & César, M. (2012). Abraçando e efectivando a inclusividade: O exemplo da inclusão de alunos Surdos no ensino regular. In I. Sanches, M. Costa, A. Mota, & Á. Santos (Eds.), *Para uma educação inclusiva: Dos conceitos às práticas* (vol. I, pp. 255-272). Edições Universitárias Lusófonas.

Melro, J., & César, M. (2014). Inclusão de estudantes adultos surdos no ensino recorrente nocturno: Uma (segunda) oportunidade para quem?!. *Interacções*, *10*(33), 128-162. https://doi.org/10.25755/int.6733

Menezes, M. B. (2023). Eliza: Trajetória e estratégias de sobrevivência de uma outsider/within na Matemática. *Bolema*, *37*(76), 407-426. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a03

Meyer, M., Prediger, S., César, M., & Norén, E. (2016). Making use of multiple (non-shared) first languages: State of and need for research and development in the European language context. In R. Barwell, P. Clarkson, A. Halai, M. Kazima, J. Moschkovich, N. Planas, M. Setati-Phakeng, P. Valero, & M. Villavicencio Ubilliús (Eds.), *Mathematics education and language diversity: The 21st ICMI study* (pp. 47-66). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-14511-2_3

Ministério da Educação (ME) (1991). Decreto-Lei n.º 319/91, de 23 de Agosto. *Diário da República* – I Série, n.º 193. INCM.

ME (2008). Decreto-Lei n.º 3/08, de 7 de Janeiro. *Diário da República* – I Série, n.º 4. Lisboa: INCM.

ME (2023). Portaria n.º 104/2023, de 13 de abril: Regulamento do Concurso Nacional de Acesso e Ingresso no Ensino Superior Público para a Matrícula e Inscrição no Ano Letivo de 2023 -2024. *Diário da República*, 1.ª série, n.º 73. INCM.

Ministério da Educação e Ciência (MEC) (2012). Decreto-Lei n.º 21/2012, de 21 de fevereiro. *Diário da República* - 1.ª série, n.º 37. INCM.

Mittler, P. (2000). *Working towards inclusive education: Social contexts*. David Fulton Publishers. https://doi.org/10.4324/9780203386149

Monteiro, V. (2003). Leitura a par: Efeitos de um programa tutorial no desempenho em leitura, motivação, auto-conceito e auto-estima de alunos do 2.º e 4.º anos de escolaridade. FCUL [Tese de doutoramento apresentada na FCUL] http://hdl.handle.net/10400.12/1661

Moscovici, S. (2000). Social representations: Explorations in social psychology. Polity Press.

Muller Mirza, N., & Grossen, M. (2024). Learning in the classroom: When emotions get in the way. In M. Giglio, & F. Arcidiacono (Eds.), *Social interactions in the classroom: Thoughts and perspectives* (pp. 27-44). Peter Lang.

Ng, C., Graham, S., Renshaw, P., Cheung, A., & Mak, B. (2024). Australian grades 4 to 6 teachers' beliefs and practices about teaching writing to low SES students. *International Journal of Educational Research*, *124*, 102304. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2023.102304

Nieto, S. (1996). Affirming diversity: The socio-political context of multicultural education. Longman Publishers.

Nieto, S. (2018). *Language, culture, and teaching: Critical perspectives for a new century* (3.ª ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315465692

Oliveira, I. (2006). Uma alternativa curricular no 2.º ciclo do ensino básico: Vivências e reflexões. APM. [Tese de doutoramento apresentada na FCUL]

Paim, M., & Bazzotti, A. (2022). O que nos diria Paulo Freire?. *Currículo sem Fronteiras*, *22*, e 2145. http://dx.doi.org/10.35786/1645-1384.v22.2145

Panitz, T. (1999). Collaborative versus cooperative learning: A comparison of the two concepts which will help us understand the underlying nature of interactive learning. Recuperado em Maio 1, 2008, de http://www.capecod.net/"Tpanitz/Tedspage

Perret-Clermont, A.-N. (2004). Thinking spaces of the young. In A.-N. Perret-Clermont, C. Pontecorvo, L. Resnick, T. Zittoun, & B. Burge (Eds.), *Joining society: Social interaction and learning in adolescence and youth* (pp. 3-10). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511616341.003

Perret-Clermont, A.-N. (2024). Préface: Présences insoupçonnées de l'objet. In A. Innaccone, E. Cattaruzza, & E. Schwab (Eds.), *Expériences sociomatérielles: Objets, interactions, espaces* (pp. 7-14). Éditions Alphil-Presses Universitaires Suisses.

Perret-Clermont, A.-N., & Giglio, M. (2024). Creating a new object in classroom: A pedagogical design for innovation and observation. In M. Giglio, & F. Arcidiacono (Eds.), *Social interactions in the classroom: Thoughts and perspectives* (pp. 213-240). Peter Lang.

Perret-Clermont, A.-N., Pontecorvo, C., Resnick, L., Zittoun, T., & Burge, B. (Eds.) (2004). *Joining society: Social interaction and learning in adolescence and youth*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511616341

Piscarreta, S. (2002). Malmequer, bem-me-quer, muito, pouco ou nada: Representações sociais da matemática em alunos do 9.º ano de escolaridade. APM. [Dissertação de mestrado, apresentada na Universidade Aberta]

Piscarreta, S., & César, M. (2004). Desafinado... ou o meu primeiro amor: A construção das representações sociais da matemática. *Vetor Neteclem*, *2*(s/n.º), 31-51.

Planas, N., Morgan, C., & Schütte, M. (Eds.) (2021). *Classroom research on mathematics and language: Seeing learners and teachers differently*. Routledge. https://doi.org/10.1080/14794802.2021.1993981

Pomeroy, E. (2000). *Experiencing exclusion*. Trentham Books.

Randstad Research (2024). O papel das pessoas com incapacidade no mercado de trabalho. Randstad.

Reinke, L., Stephan, M., & Cobb, P. (2024). Teacher press to establish what counts as an acceptable explanation grounded in problem settings. *Journak für Mathematik-Didaktik*, *45*, 31-56. https://doi.org/10.1007/s13138-023-00225-1

Reis, P. (2009). *Antes de ser feliz*. D. Quixote.

Renshaw, P. (2004). Introduction. Dialogic teaching, learning and instruction: Theoretical roots and analytical frameworks. In J. van der Linden, & P. Renshaw (Eds.), *Dialogic learning: Shifting perspectives to learning, instruction, and teaching* (pp. 1-15). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/1-4020-1931-9_1

Rodrigues, D. (2003). Educação inclusiva: As boas notícias e as más notícias. In D. Rodrigues (Ed.), *Perspectivas sobre a inclusão: Da educação à sociedade* (pp. 89-101). Porto Editora.

Rodrigues, D. (2006). Dez ideias (mal)feitas sobre a educação inclusiva. In D. Rodrigues (Ed.), *Inclusão e educação: Doze olhares sobre a educação inclusiva* (pp. 300-318). Summus Editorial.

Rommetveit, R. (1974). On message structure: A framework for the study of language and communication. John Wiley and Sons.

Rommetveit, R. (1979). On Piagetian cognitive operations, semantic competence and message structure in adult-child communication. In R. Blakar, & R. Rommetveit (Eds.), *Studies in language and thought and verbal communication* (pp. 457-466). Academic Press.

Rose, R. (2002). The curriculum: A vehicle for inclusion or a lever for exclusion?. In C. Tilstone, L. Florian, & R. Rose (Eds.), *Promoting inclusive practice* (pp. 27-38). Routledge Falmer.

Rossi, F., Pontecorvo, C., & Arcidiacono, F. (2024). The role of peer interaction in early literacy in schools. In M. Giglio, & F. Arcidiacono (Eds.), *Social interactions in the classroom: Thoughts and perspectives* (pp. 171-192). Peter Lang.

Roth, W.-M., & Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-564-2

Säljö, R., & Mäkitalo, A. (2022). Developing and learning in a designed world. In N. Veraksa, & I. Pramling Samuelsson (Eds.), *Piaget and Vygotsky in the XXI century: Discourse in early childhood education* (pp. 27-40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-05747-2

Santos, A., & Ferreira, M. (2023). Políticas de avaliação como políticas de currículo: A "alquimia" da Matemática no Exame Nacional do Ensino Médio. *Currículo sem Fronteiras*, *23*, e 1142. http://dx.doi.org/10.35786/1645-1384.v23.1142

Santos, J., & Hamido, G. (Eds.) (2014). *Interacções*, *10*(33). [Número especial: Educação inclusiva, vinte anos depois da Declaração de Salamanca]. https://doi.org/10.25755/int.6728

Santos, J. dos (1990). Eu agora quero-me ir embora: Conversas com João Sousa Monteiro. Assírio e Alvim.

Santos, J. dos (1991a). *Ensaios sobre Educação I: A Criança quem é?*. Livros Horizonte.

Santos, J. dos (1991b). *Ensaios sobre educação II: Falar das letras*. Livros Horizonte.

Santos, N. (2008). Ver a matemática com pontos: Um estudo de caso de um aluno cego do 12.º ano de escolaridade. DEFCUL. [Dissertação de Mestrado apresentada no DEFCUL]

Santos, N., & César, M. (2008). O acesso à participação de um aluno cego nas aulas de matemática. In R. González, B. Allonso, M. Machin, & L. J. Nieto (Eds.), *Actas do investigación en educación matemática XII* (pp. 717-724). APM. [CdRom]

Santos, N., & César, M. (2009). A mediação no acesso de um aluno cego às ferramentas culturais da matemática. In A. Estrela, L. Marmoz, R. Canário, J. Ferreira, B. Cabrito, N. Alves, ... P. Figueiredo (Eds.), *Actas do XVI colóquio da AFIRSE. Tutoria e mediação em educação: Novos desafios à investigação educacional*. Secção Portuguesa da AFIRSE. [CdRom]

Santos, N., Ventura, C., & César, M. (2008). Alunos cegos nas aulas de matemática. In APM (Ed.), *Actas do ProfMat 2008*. APM. [CdRom]

Schubauer-Leoni, M. L. (1986). Le contract didactique: Un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les élèves en mathématique. *European Journal of Psychology of Education*, *I*(2), 139-153. https://doi.org/10.1007/BF03172575

Schubauer-Leoni, M. L., & Grossen, M. (1993). Negotiating the meaning of questions in didactic and experimental contracts. *European Journal of Psychology of Education*, *VIII*(4), 451-471. https://doi.org/10.1007/BF03172700

Schubauer-Leoni, M. L., & Perret-Clermont, A.-N. (1985). Interactions sociales dans l'apprentissage de connaissances mathématiques chez l'enfant. In G. Mugny (Ed.), *Psychologie sociale du développement cognitif* (pp. 225-250). Peter Lang.

Schubauer-Leoni, M. L., & Perret-Clermont, A.-N. (1997). Social interactions and mathematics learning. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 265-283). Psychology Press.

Secada, W. G. (1995). Social and critical dimensions for equity in mathematics education. In W. G. Secada, E. Fennema, & L. B. Adajion (Eds.), *New directions for equity in mathematics education* (pp. 146-163). Cambridge University Press.

Secretaria de Estado da Educação e Inovação (SEEI) (1996). Despacho n.º 12/SEEI/96, de 11 de Abril, *Diário da República*, II Series, n.º 86. INCM.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse that meets the ears: Learning from mathematical communication things that we have not known before. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1-3), 13-57. https://doi.org/10.1023/A:1014097416157

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944

Sfard, A. (2021). Bewitched by language. In N. Planas, C. Morgan, & M. Schütte (Eds.), *Classroom research on mathematics and language: Seeing learners and teachers differently* (pp. 41-59). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429260889-4

Silva, M. A. (2008). Uma outra forma de ver o mundo: A inclusividade através de actividades laboratoriais em ciências físico-químicas do 8.º ano de escolaridade. Faculdade de Motricidade Humana da Universidade Técnica de Lisboa (FMH-UTL). [Dissertação de mestrado, apresentada na FMH-UTL e Faculdade de Ciências Médicas da Universidade Nova de Lisboa (FCM-UNL). http://hdl.handle.net/10451/6413

Silva, M. A., & César, M. (2008). Ver o mundo quando não se vê: Actividades laboratoriais adaptadas, em ciências físico-químicas. In J. Ferreira, A. R. Simões, & P. Figueiredo (Eds.), *Complexidade: Um novo paradigma para investigar e intervir em educação?. Actas do XV colóquio da AFIRSE*. SPCE, Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Lisboa (FPCEUL) & Association Francophone Internationale de Recherche Scientifique en Education (AFIRSE). [CdRom]

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher, November*, 9-15. http://www.jstor.org/stable/41187667

Skovsmose, O. (2012). Critical mathematics education: A dialogical journey. In A. A. Wager & D. W. Stinson (Eds.), *Teaching mathematics for social justice: Conversations with mathematics educators* (pp. 35-47). NCTM.

Skovsmose, O. (2019). Inclusions, meetings and landscapes. In D. Kollosche, R. Marcone, M. Knigge, M. G. Penteado, & O. Skovsmose (Eds.), *Inclusive mathematics education: State-of-the-art research from Brazil and Germany* (pp. 71-86). Springer.

Skovsmose, O. (2022). Concerns of critical mathematics education and of ethomathematics. *Revista Colombiana de Educación*, *86*, 365-382. https://doi.org/10.17227/rce.num86-13713

Skovsmose, O. (2023). *Critical mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-26242-5

Skovsmose, O., Moura A. Q., & Carrijo, M. (2023). Inclusive citizenship through mathematics education: A conceptual investigation. *International Journal on Mathematics Education* (ZDM), *55*, 941-951. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01470-x

Slavin, R. (1980). Cooperative learning. *Review of Educational Research*, *50*(2), 315-342. https://doi.org/10.3102/00346543050002315

Slavin, R. (1990). Research on cooperative learning: Consensus and controversy. *Educational Leadership*, *47*(4), 52-54. https://doi.org/10.3102/0034654305000231

Slavin, R. (1999). Comprehensive approaches to cooperative learning. *Theory into Practices*, *32*(2), 74-79. https://doi.org/10.1080/00405849909543835

Spearman, C. (1904). General intelligence objectively determined and measured. *American Journal of Psychology*, *15*, 201-293. https://doi.org/10.2307/1412107

Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Sage Publications.

Staples, M. H. (2007). Supporting whole-class collaborative inquiry in a secondary mathematics classroom. *Cognition & Instruction*, *25*(2&3), 161-217. https://doi.org/10.1080/07370000701301125

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stoer, S., Magalhães, A., & Rodrigues, D. (2004). *Os lugares da exclusão social*. Cortez Editores.

Strecht, P. (2008). A minha escola não é esta: Dificuldades de aprendizagem e comportamento em crianças e adolescentes. Assírio & Alvim.

Strecht, P. (2011). O vento à volta de tudo: Uma viagem pela adolescência. Verso de Kapa.

Sistema de Segurança Interna (SSI) (2024). *Relatório anual de segurança interna 2023*. Gabinete do Secretário-Geral SSI.

UNESCO (1994). Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais. UNESCO.

Valsiner, J. (2004). Three years later: Culture in psychology, between social positioning and producing new knowledge. *Culture & Psychology*, *10*(1), 5-27. https://doi.org/10.1177/1354067X04040925

Valsiner, J. (2005). Scaffolding within the structure of dialogical self: Hierarchical dynamics of semiotic mediation. *New Ideas in Psychology*, *23*, 197-206. https://doi.org/10.1016/j.newideapsych.2006.06.001

Ventura, C. (2012). *Interacção e Conhecimento: Um estudo de caso que analisa a história de um projecto*. APM. [Tese de doutoramento apresentada na FCT-UNL] http://hdl.handle.net/10362/7914

Ventura, C., César, M., & Matos, J. M. (2013). Interacção e Conhecimento: A história de um projecto singular. *Interacções*, *9*(27), 44-96. https://doi.org/10.25755/int.3403

Ventura, C., César, M., & Santos, N. (2010). Comunicar sem ver: Um estudo sobre formas de comunicação com alunos cegos, em aulas de matemática. In J. M. Matos, A. Domingos, C. Carvalho, & P. Teixeira (Eds.), *Investigação em educação matemática – 2010: Comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática* (pp. 114-127). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *2*(2), 215-232. https://revue-rdm.com/1981/quelques-orientations-theoriques-et-methodologiques-des-recherches-francaises-en-didactique-des-mathematiques/

Vygotsky, L. S. (1934/1962). *Thought and language* (Myshlenie I rech', Trad.). MIT Press. [Original publicado em russo em 1934]

Vygotsky, L. S. (1932/1978). *Mind and society: The development of higher psychological processes* (M. Cole, Trad.). Harvard University Press. [Original publicado em russo em 1932]

Vygotsky, L. S. (1985). Le problème de l'enseignement et du développementment à l'âge scolaire. In B. Schneuwly, & J.-P. Bronckart (Eds.), *Vygotsky aujourd'hui* (pp. 95-117). Delachaux et Niestlé.

Wegerif, R., Mercer, N., & Major, L. (2019). Introduction. In N. Mercer, R. Wegerif, & L. Majors (Eds.), *The Routledge international handbook of research on dialogical education* (pp. 1-8). Routledge.

Wertsch, J. V. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind*. Harvard University Press. https://doi.org/10.1525/aa.1987.89.2.02a00500

Wertsch, J. V. (1991). Voices of mind. A sociocultural approach to mediated action. Havester Wheatsheaf.

Wechsler, D. (1939). *The measurement of adult intelligence*. Williams & Wilkins.

Wechsler, D. (1958). *The measurement and appraisal of adult intelligence* (4.ª ed.). Williams & Wilkins.

Wechsler, D. (1997). *Wechsler adult intelligence scale* (3.ª ed.). Harcourt Assessment.

Yeager, E, Green, J., & Castanheira, M. L. (2009). Two languages, one community: On the discursive construction of community in bilingual classrooms. In M. César, & K. Kumpulainen (Eds.), *Social interactions in multicultural settings* (pp. 235-268). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087907174_011

Zittoun, T. (2006). Transitions: Development through symbolic resources. IAP.

Zittoun, T. (2023). *The pleasure of thinking*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781009039802

Zittoun, T., & Grossen, M. (2024). Heterogeneity of classroom interactions: Philosophy and literature in high school. In M. Giglio, & F. Arcidiacono (Eds.), *Social interactions in the classroom: Thoughts and perspectives* (pp. 83-102). Peter Lang.

ANEXOS

ANEXO 1

Fichas de trabalho N.º 1 e N.º 2 – Equações

FICHA DE TRABALHO N.º 1

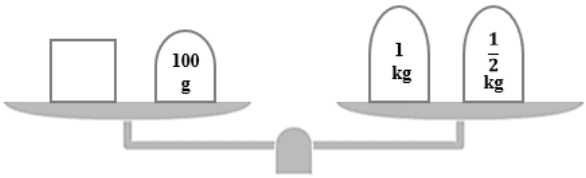
Nomes: _____

Data: ___ / ___ / ____ Turma: ____ N.º ____ e N.º _____

Como podes observar, em cada uma das figuras, encontram-se balanças. Os pratos das balanças estão em equilíbrio, ou seja, têm o mesmo peso.

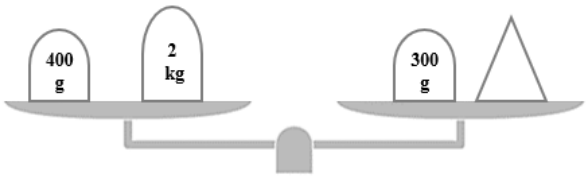
Pretende-se determinar quanto pesam os objetos cujo peso não sabemos. Explica como pensaste e que cálculos fizeste para chegar ao resultado.

1.



□ pesa _____

2.



△ pesa _____

□ pesa _____

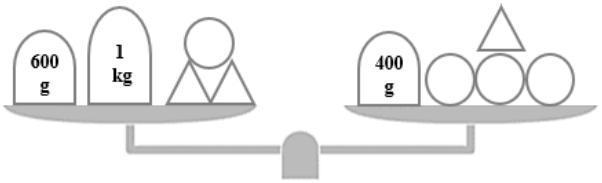
4.

⌓ pesa _____

5.

○ pesa _____

6.



○ pesa _____

Atenção:

○ = 2 × △

(A bola vale o dobro do triângulo)

FICHA DE TRABALHO N.º 2

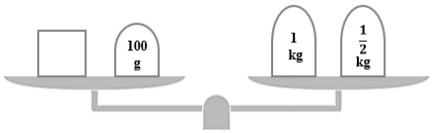
Nomes: _____

Data: ___ / ___ / ____ Turma: ____ N.º ____ e N.º _____

Cada balança, dos problemas anteriores, pode ser descrita por uma **EQUAÇÃO.**

EXEMPLO:

1.



Equação:

$x + 100 = 1000 + 500$

Descreve cada balança das figuras seguintes, usando uma equação.

2.

Equação:

_____

3.

Equação:

_____

4.

Equação:

_____

5.

Equação:

_____

6.

Equação:

_____

Atenção: ○ = 2 × △

ANEXO 2

Grupos Capacidades e Competências – IACC

GRUPOS CAPACIDADES E COMPETÊNCIAS - IACC

1. Tudo com explicações
2. Tudo sem algumas explicações
3. RA + outras três tarefas (A, B, D ou E)
4. RA + outras duas tarefas (A, B, D ou E)
5. RA + uma das outras tarefas (A, B, D ou E)
6. Só RA
7. RC + outras três tarefas (A, B, D ou E)
8. RC + outras duas tarefas (A, B, D ou E)
9. RC + uma das outras tarefas (A, B, D ou E)
10. Só RC
11. Resoluções que precisam de uma análise mais detalhada (casos que podem ser problemáticos)

@editorapoisson

www.poisson.com.br
contato@poisson.com.br

https://www.facebook.com/editorapoisson